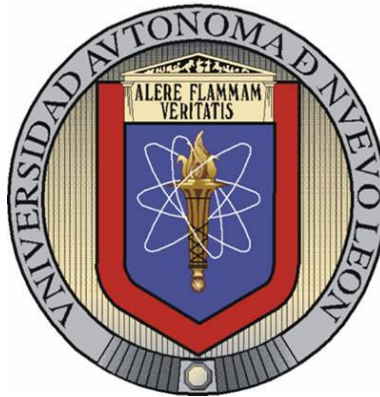


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



**“DETERMINACIÓN DE COTAS INFERIORES BASADAS
EN RELAJACIÓN LAGRANGIANA PARA UN
PROBLEMA BI-OBJETIVO DE DISEÑO DE CADENA DE
SUMINISTRO”**

Por:

ANEL BERENICE REYES RAMÍREZ

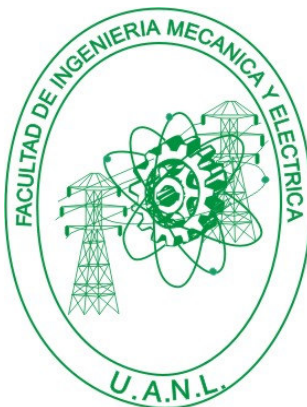
TESIS

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE
SISTEMAS**

San Nicolás de los Garza, Nuevo León

Julio de 2008

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
DIVISIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO



**“DETERMINACIÓN DE COTAS INFERIORES BASADAS
EN RELAJACIÓN LAGRANGIANA PARA UN
PROBLEMA BI-OBJETIVO DE DISEÑO DE CADENA DE
SUMINISTRO”**

Por:

ANEL BERENICE REYES RAMÍREZ

TESIS

**EN OPCIÓN AL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN INGENIERÍA DE
SISTEMAS**

San Nicolás de los Garza, Nuevo León

Julio de 2008

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

División de Estudios de Posgrado

Los miembros del Comité de Tesis recomendamos que la tesis **“Determinación de cotas inferiores basadas en relajación lagrangiana para un problema bi-objetivo de diseño de cadena de suministro”**, realizada por la alumna Anel Berenice Reyes Ramírez, matrícula **1070572**, sea aceptada para su defensa como opción al grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería de Sistemas.

El Comité de Tesis

Dra. Ada Margarita Álvarez Socarrás

Asesor

Dr. Roger Z. Ríos Mercado

Revisor

Dr. Igor S. Litvinchev

Revisor

Vo. Bo.

Dr. Guadalupe Alan Castillo Rodríguez

División de Estudios de Posgrado

San Nicolás de los Garza, N. L., Julio de 2008.

DEDICATORIA

Principalmente a **Dios** por permitirme realizar este trabajo, además de iluminarme cada día para seguir esforzándome y dar lo mejor de mí día con día.

A mis Padres: **Sergio Reyes Hernández** y **Flor Ramírez Quintas** que son mi principal ejemplo a seguir; que con su amor, paciencia y apoyo me guían en cada paso que doy en la vida.

A las personas mas cercanas en mi vida: Adiel, Emelic, Lauro y José Luis, por estar siempre conmigo y enseñarme que las mejores cosas de mi vida son las que he vivido con sencillez y amor.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Autónoma de Nuevo León (UANL) por su apoyo de becas de inscripción y a la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica (FIME) por su apoyo de colegiatura de estudio.

Al consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) por el apoyo económico que me brindó durante mis estudios. Además, por su apoyo de beca por medio del proyecto CONACYT 61903.

A la UANL por las becas otorgadas bajo el programa de apoyo a la investigación científica y tecnológica por medio del proyecto PAICYT CA 1521-07.

Principalmente a mi asesora Dra. Ada Margarita Álvarez Socarrás por brindarme la oportunidad de trabajar en este proyecto y por ser guía fundamental para realizar esta tesis. Además mi más profundo agradecimiento al Dr. Roger Z. Ríos Mercado y al Dr. Igor S. Litvinchev que se tomaron su tiempo para ser revisores de esta tesis, que con sus consejos, comentarios y conocimiento ayudaron a mejorar y terminar este trabajo.

Al Dr. Elías Olivares Benítez por su participación y apoyo en información para la realización de este trabajo.

A los Doctores de PISIS que me transmitieron sus conocimientos y experiencias durante mi estancia en esta institución, ya que fueron una base fundamental en la formación científica.

A mis compañeros de PISIS, principalmente a mis amigas: Enid, Herizet, Karla y Xochitl ya que con sus actitudes y cualidades me enseñan día con día a ser mejor persona tanto en cuestión profesional como en la personal.

En general a todos mis amigos que me han apoyado, aconsejado, animado y sobre todo por su compañía, no solo durante este trabajo sino en toda mi vida.

RESUMEN

Anel Berenice Reyes Ramírez.

Candidata para el grado de Maestro en Ciencias en Ingeniería de Sistemas

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Título del estudio:

“Determinación de cotas inferiores basadas en relajación lagrangiana para un problema bi-objetivo de diseño de cadena de suministro”

Número de páginas: 147.

El problema que se aborda en este trabajo se basa en un diseño de cadena de suministro de dos etapas. En la primera etapa las plantas manufactureras envían el producto a los almacenes o puntos de concentración y la segunda etapa corresponde al flujo del producto desde esos almacenes hacia los centros de distribución o clientes. El número y ubicación de las plantas y los centros de distribución es conocido.

Sin embargo, para los almacenes o puntos de concentración, existe un conjunto de ubicaciones potenciales donde pueden ser abiertos, y no está definido a priori el número de almacenes a abrir. Cada sitio candidato tiene asociado un costo fijo por abrir allí una

instalación, así como una capacidad finita para dicha instalación. Las plantas, por su parte, tienen una capacidad de manufactura limitada y cada centro de distribución tiene una demanda que debe ser satisfecha en su totalidad, pero se tiene la restricción de que la misma sea abastecida desde un solo almacén.

Para el transporte del producto entre instalaciones en cada etapa de la cadena se consideran diversas opciones. Cada opción representa un tipo de servicio y se describe a través del costo de transportación y el tiempo entre instalaciones. Se asume que entre menor sea el tiempo de transportación, este servicio es más caro.

El modelo decide los sitios apropiados para abrir los almacenes y el flujo entre las instalaciones con el objetivo de minimizar:

- Costo combinado de transportación y apertura de las instalaciones.
- Tiempo máximo de transportación desde las plantas hasta los centros de distribución.

Este problema está clasificado como NP-duro y dada su complejidad ha sido necesario acudir a desarrollos de métodos aproximados para solucionarlo. En estos casos es importante contar con cotas inferiores y superiores que permitan avalar la eficiencia de los métodos de solución propuestos. El presente trabajo tiene como objetivo la búsqueda de cotas inferiores de calidad que permitan una mejor evaluación de los métodos aproximados que se propongan para resolver problemas de este tipo. Sin embargo, dado que estamos en presencia de un problema bi-objetivo, el enfoque de la tesis es el de desarrollar estrategias para obtener un conjunto de valores que acotan inferiormente el conjunto óptimo de Pareto.

Específicamente se proponen cinco esquemas de relajación lagrangiana tomando en cuenta diferentes aspectos de la estructura del problema. Se utiliza el método de optimización por subgradiente para resolver el dual lagrangiano y se realizan

experimentos computacionales para determinar el valor adecuado de los parámetros que utiliza el método.

Con el objetivo de determinar cuál de los esquemas propuestos es el mejor, en cuanto a calidad de las cotas entregadas y tiempo computacional consumido, se realizaron experimentos utilizando instancias pequeñas para las cuales se pudo calcular el verdadero conjunto eficiente utilizando el método ε -restringido. Para estas instancias se comparó el conjunto acotador inferior obtenido con cada esquema de relajación propuesto contra el verdadero conjunto eficiente y se determinó la relajación que representa el mejor compromiso entre calidad de las cotas entregadas y costo computacional. Utilizando esta relajación, se obtienen los conjuntos acotadores de las instancias clasificadas como grandes.

Como resultado de la tesis se entrega una metodología basada en relajación lagrangiana que puede utilizarse como herramienta de evaluación de algoritmos aproximados que se propongan para resolver el problema estudiado en esta tesis.

Dra. Ada Margarita Álvarez Socarrás

Asesor

ÍNDICE GENERAL

Dedicatoria	IV
Agradecimientos	V
Resumen	VII
1. Introducción	1
1.1 Decisiones en la planeación estratégica de una cadena de suministro.....	1
1.2 Descripción del problema a tratar en esta tesis.....	3
1.3 Justificación e importancia del estudio.....	5
1.4 Objetivo de la tesis.....	5
1.5 Estructura de la tesis.....	6
2. Marco teórico	7
2.1 Relajación de un problema de optimización.....	8
2.1.1 Relajación lineal.....	9
2.1.2 Relajación lagrangiana.....	9
2.2 Optimización multiobjetivo.....	13
2.2.1 Soluciones eficientes y puntos no dominados.....	14
2.2.2 Clasificación de los métodos de optimización multiobjetivo.....	16
2.2.3 Método ε -restringido.....	17
2.3 Cotas en problemas de optimización multiobjetivo.....	22
2.4 Trabajos relacionados.....	24
3. Formulación matemática del problema	28
3.1 Planteamiento del problema.....	28
3.2 Complejidad del problema.....	36

4. Metodología para la obtención de conjuntos acotadores	39
4.1 La relajación lineal y el método ε -R.....	40
4.2 Descripción de las dualizaciones propuestas.....	41
4.2.1 Dualización 1.....	42
4.2.2 Dualización 2.....	45
4.2.3 Dualización 3.....	49
4.2.4 Dualización 4.....	52
4.2.5 Dualización 5.....	55
4.3 Restricciones redundantes.....	56
4.4 Método de optimización por subgradiente.....	57
4.4.1 Fundamentos del método.....	57
4.4.2 El método de optimización por subgradiente.....	57
4.5 Heurística para encontrar una solución factible.....	59
 5. Experimentación computacional	 63
5.1 Objetivos de los experimentos.....	64
5.2 Instancias utilizadas.....	64
5.3 Rangos para las medidas de desempeño.....	66
5.4 Fase I del experimento computacional.....	67
5.4.1 Ajuste de parámetros del algoritmo subgradiente.....	67
5.4.1.1 Inicialización de los multiplicadores de Lagrange.....	68
5.4.1.2 Decremento del parámetro θ_k	68
5.4.1.3 Resultado del experimento.....	69
5.4.2 Introducción de restricciones adicionales.....	86
5.4.3 Evaluación preliminar del tiempo de cómputo requerido para resolver cada dualización.....	87
5.4.4 Evaluación de conjuntos de acotamiento por todas las dualizaciones.	88
5.4.4.1 Métricas de comparación.....	88
5.4.4.2 Comparación de las cotas entregadas por cada dualización contra el frente de Pareto óptimo.....	90

5.5 Fase II del experimento computacional.....	97
6. Conclusiones	102
6.1 Resumen.....	102
6.2 Conclusiones.....	104
6.3 Trabajo futuro.....	105
Apéndice A	108
Apéndice B	128
Apéndice C	130
Apéndice D	140
Bibliografía	143
Autobiografía	147

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Número de variables en el modelo.....	36
3.2. Número de restricciones involucradas en el modelo.....	37
5.1. Estructura de instancias pequeñas y grandes.....	65
5.2. Rango de variación para f_1 y f_2	67
5.3. Valor de f_1 para tres valores de ε del MIP y RL.....	69
5.4. Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 17$	70
5.5. Tiempo de ejecución para las 5 dualizaciones en el punto 17.....	73
5.6. Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 11$	74
5.7. Tiempo de ejecución para las 5 dualizaciones en el punto 11.....	77
5.8. Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 6$	78
5.9. Tiempo de ejecución para las 5 dualizaciones en el punto 6.....	81
5.10. Valor de f_1 para tres valores de ε del MIP y RL.....	83
5.11. Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 50$	83
5.12. Tiempo de ejecución de las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 50$	85
5.13. Asignación de parámetros para las 5 dualizaciones.....	86
5.14. Tiempo de ejecución y valor de $\bar{D}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ para las instancias pequeñas.....	92
5.15. Valores de $D_{\min}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ y $D_{\max}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ de las instancias pequeñas.....	93
5.16. Conjuntos acotadores inferiores de las instancias de tamaño 5_20_20_2.	98
5.17. Valor de f_1 de D4 para la instancia 5_20_20_2_001.....	99
5.18. Valor de f_1 de D4 para la instancia 5_20_20_2_002.....	100
5.19. Valor de f_1 de D4 para la instancia 5_20_20_2_003.....	100

5.20. Conjuntos acotadores inferiores de D4 para las instancias de tamaño 20_20_20_5 y 50_50_50_2.....	100
B.1. Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 17$	128
B.2. Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 11$	129
B.3. Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 6$	129
C.1. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_2_001.....	131
C.2. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_2_002.....	132
C.3. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_2_003.....	133
C.4. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_5_001.....	134
C.5. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_5_002.....	135
C.6. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_5_003.....	136
C.7. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_20_2_001.....	137
C.8. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_20_2_002.....	138
C.9. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_20_2_003.....	139
D.1. Tiempo de ejecución y valor $\overline{D}(\text{ConjR}, \text{ConjMIP})$ para las instancias pequeñas.....	140
D.2. Valores de $D_{\min}(\text{ConjR}, \text{ConjMIP})$ y $D_{\max}(\text{ConjR}, \text{ConjMIP})$ de las instancias pequeñas.....	141
D.3. Intervalo de optimalidad de RL entre las dualizaciones.....	141
D.4. Intervalo de optimalidad de LPc entre las dualizaciones.....	141
D.5. Intervalo de optimalidad de ABr entre las dualizaciones.....	142
D.6. Intervalo de optimalidad de Zr entre las dualizaciones.....	142

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Región factible F del problema bi-objetivo.....	19
2.2. Región factible Z en el espacio de objetivos.....	19
2.3. Región factible en el espacio de decisiones.....	20
2.4. Región factible en el espacio de objetivos.....	21
3.1. Representación de una red de cadena de suministro de dos etapas.....	30
4.1. Representación grafica de separación del problema original.....	42
4.2. Algoritmo del método de optimización por subgradiente.....	58
5.1. Convergencia de D1 de $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ para $p = 3$ en el punto 17...	72
5.2. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 17..	72
5.3. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 17..	73
5.4. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 11..	76
5.5. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 11...	76
5.6. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 11.	77
5.7. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 6...	80
5.8. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 6...	80
5.9. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 6...	81
5.10. Valores de f_1 de $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ para $p = 10$ en el punto 50.....	84
5.11. Valores de f_1 de $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ para $p = 20$ en el punto 50.....	84
5.12. Tiempo de ejecución para $\varepsilon = 17$, $\varepsilon = 11$, $\varepsilon = 6$	87
5.13. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_2_001.....	91
5.14. Tiempo de ejecución para la instancia 5_5_5_2_001.....	92
5.15. Tiempo de ejecución de las instancias de tamaño 5_20_20_2.....	99

A.1. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 6...	108
A.2. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 6...	109
A.3. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 6..	109
A.4. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 11.	110
A.5. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 11.	110
A.6. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 11	111
A.7. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 17	111
A.8. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 17	112
A.9. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 17.....	112
A.10. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 6..	113
A.11. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 6..	113
A.12. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 6.	114
A.13. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 11	114
A.14. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 11	115
A.15. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 11.....	115
A.16. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 17	116
A.17. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 17	116
A.18. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 17.....	117
A.19. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 6..	117
A.20. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 6..	118
A.21. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 6.	118
A.22. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 11	119

A.23. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 11	119
A.24. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 11.....	120
A.25. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 17	120
A.26. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 17	121
A.27. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 17.....	121
A.28. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 6..	122
A.29. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 6..	122
A.30. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 6.	123
A.31. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 11	123
A.32. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 11	124
A.33. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 11.....	124
A.34. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 17	125
A.35. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 17	125
A.36. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 17.....	126
A.37. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 50.....	126
A.38. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 20$ en el punto 50.....	127
A.39. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 50.....	127

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 Decisiones en la planeación estratégica de una cadena de suministro

Una componente crucial de las actividades de planeación de cualquier empresa manufacturera es el diseño y operación eficiente de su cadena de suministro. En general, una cadena de suministro es una red de proveedores, plantas manufactureras, almacenes y canales de distribución organizados para la adquisición de materia prima, convertir esa materia prima en productos terminados y distribuir estos productos hasta los clientes.

Las actividades de planeación pueden ser del orden táctico o del orden estratégico. La planeación de la cadena de suministro, desde el punto de vista estratégico, consiste en determinar la configuración de la red, lo que comprende decidir la cantidad de instalaciones, sus ubicaciones, capacidades, y tecnología. La planeación táctica de las operaciones de una cadena de suministro incluye decidir las cantidades agregadas y flujos de materiales para la compra, procesamiento y distribución de productos.

La configuración estratégica de la cadena de suministro es un factor fundamental que influye en forma decisiva en la eficiencia de las operaciones tácticas y por tanto tiene un impacto duradero en las empresas. Más aún, el hecho de que la configuración de la

cadena de suministro compromete recursos sustanciales y capital importante de la empresa por un período largo de tiempo, hace que el diseño de la red de la cadena de suministro sea un problema extremadamente importante.

La planeación estratégica en la administración de la cadena de suministro concierne a la ubicación de instalaciones tales como plantas y centros de distribución, la asignación de capacidades y requerimientos tecnológicos a las instalaciones, la asignación de productos a las instalaciones y la distribución de los productos entre las instalaciones y las zonas de clientes.

Un diseño eficiente de la cadena de suministro implica entonces mejores ubicaciones para las instalaciones de producción y distribución, así como una mejor planeación de la capacidad y la tecnología para un mejor acceso a los mercados de los clientes. Las decisiones implicadas son (Simchi-Levi, Kaminski y Simchi-Levi, 2000):

- Determinar el número de instalaciones.
- Determinar la ubicación de las instalaciones.
- Determinar la capacidad de las instalaciones.
- Asignar productos a las instalaciones
- Determinar el flujo del producto entre las instalaciones.

Los problemas de ubicación de instalaciones pueden ser divididos inicialmente en dependencia de si el espacio de búsqueda es discreto o continuo. La ubicación continua explora una ubicación posible a lo largo de un espacio continuo para seleccionar el mejor lugar. La ubicación discreta solo considera un conjunto de posibles opciones que han sido preseleccionadas para su disponibilidad.

Por otra parte, estos problemas de ubicación de instalaciones pueden ser clasificados en diferentes subcategorías dependiendo de las propiedades que se asuman (Mirchandani y Francis, 1990). En el problema de ubicación de instalaciones no capacitado, se asume que no hay límite de capacidad en cada posible ubicación, por lo

que cada cliente consigue toda la demanda requerida desde una sola instalación. Cuando cada instalación tiene una capacidad limitada, el problema se conoce como problema de ubicación de instalaciones capacitado. Un caso especial de éste es el problema en el que cada cliente debe ser abastecido por una instalación únicamente.

Una extensión del problema de ubicación de instalaciones es cuando se tienen dos niveles de instalaciones, donde se involucra un proceso de distribución de dos etapas, con entregas que se hacen a partir de las instalaciones del primer nivel (por ejemplo: plantas) a instalaciones del segundo nivel (por ejemplo: almacenes) y de ahí hasta los clientes. (Tragantalerngsak, Holt y Rönnqvist, 1997).

En los problemas mencionados el objetivo consiste en minimizar la suma de los costos en que se incurren por abrir instalaciones (costos fijos) más los costos de asignar clientes con demandas conocidas a las instalaciones abiertas (costos variables).

Sin embargo, debido a la transformación de las cadenas de manufactura/distribución a lo largo de todo el mundo, una ventaja competitiva de muchas firmas en la actualidad radica en controlar el tiempo guía. Por ello es de importancia considerar estos tiempos explícitamente al momento de diseñar la cadena de suministro.

1.2 Descripción del problema a tratar en esta tesis

El problema que motiva y sirve de base a este trabajo puede ser considerado una extensión del problema de ubicación de instalaciones con carga fija (ó costos fijos) y se centra en la fase de planeación estratégica de redes de suministro de dos etapas.

En la primera etapa las plantas manufactureras envían el producto a los almacenes o puntos de concentración y en la segunda etapa corresponde al flujo del producto desde los almacenes hacia los centros de distribución. El problema consiste, por una parte, en seleccionar los sitios apropiados para abrir almacenes, así como el flujo entre

instalaciones con el objetivo de minimizar el costo combinado de transporte y apertura de instalaciones. Este problema es muy común en redes de distribución donde ya existen las plantas manufactureras y los centros de distribución y la decisión se basa en la ubicación de “centros de consolidación o almacenes” que mejoren los costos de la red.

Ahora bien, la disponibilidad de diferentes compañías transportistas, así como la oferta en cada una de ellas de diferentes tipos de servicio (por ejemplo, regular o expreso) y la posibilidad de usar diferentes modos de transporte (por ejemplo camión, tren, avión o intermodal) hacen que sea necesaria la consideración de diversas opciones para transportar el producto de una instalación a otra en cada nivel de la cadena. Cada opción representa un tipo de servicio el cual tiene asociado un costo y tiempo de transporte entre instalaciones y comúnmente existe una correspondencia inversa entre estos dos factores, es decir, un servicio más rápido será generalmente más costoso.

Así, el problema bajo estudio trata de minimizar también el tiempo de transportación desde las plantas hasta los centros de distribución. Esta parte del problema determina cuáles servicios deben ser seleccionados con el objetivo de reducir el tiempo de transportación en cada nivel de la cadena de suministro.

De esta forma el compromiso entre costo y tiempo crea un problema bi-objetivo. Un criterio trata de minimizar los costos combinados de transportación y apertura de instalaciones y el otro criterio busca la reducción del tiempo de transporte del producto a lo largo de la cadena de suministro.

Las soluciones de interés en un problema bi-objetivo son las denominadas “soluciones eficientes”, que son aquellas para las cuales no existe otra solución que sea al menos tan buena como ella para un objetivo y estrictamente mejor para el otro objetivo. En el presente trabajo se buscan conjuntos que acoten inferiormente al conjunto de soluciones eficientes del problema que ha sido descrito.

1.3 Justificación e importancia del estudio

Este trabajo es una extensión del trabajo de Olivares-Benítez (2007). El problema bajo estudio está clasificado como NP-duro. Es decir, cualquier algoritmo que pretenda encontrar la solución óptima global al problema tendrá un tiempo de ejecución que crece, en el peor de los casos, exponencialmente con el tamaño del problema.

En estos casos se recurre comúnmente al diseño de algoritmos heurísticos que aporten soluciones de calidad, sobre todo si el tamaño de las instancias reales impide la utilización de métodos exactos. En estos casos es importante contar con mecanismos que permitan avalar la eficiencia de los métodos aproximados que se desarrollen para dar solución a problemas de este tipo.

En este sentido, la obtención de cotas inferiores y superiores ha jugado un papel muy importante en la Teoría de la Aproximación para resolver problemas de optimización mono-objetivo. Sin embargo, en Optimización Multiobjetivo, su uso ha estado más limitado y la mayoría de las veces se ha reducido al cálculo de las cotas clásicas: los puntos *ideal* y *nadir* (cota inferior y superior de cualquier solución eficiente de un problema multiobjetivo, respectivamente).

Específicamente, para el problema tipo que se aborda en esta tesis, no se ha encontrado en la literatura ningún estudio dirigido a encontrar conjuntos acotadores de las soluciones no dominadas. Por ello, se torna interesante e importante la realización del presente trabajo.

1.4 Objetivo de la tesis

Esta tesis tiene como objetivos fundamentales:

- Estudiar la estructura matemática del problema bi-objetivo de ubicación de instalaciones en cadenas de suministro de dos etapas.

- Proponer diferentes esquemas de acotación inferior basados en relajación lagrangiana.
- Evaluar empíricamente los esquemas propuestos en base a la calidad del conjunto acotador obtenido y el tiempo computacional requerido para ello.

1.5 Estructura de la tesis

El resto de la tesis está estructurado como sigue. En el Capítulo 2 se ofrece el marco teórico que sustenta el trabajo, comenzando por una explicación de la técnica de relajación y más específicamente de la relajación lagrangiana. Como el problema que se estudia es bi-objetivo, también se da una breve introducción a conceptos y métodos de la Programación Multiobjetivo y por último se describen algunos trabajos relacionados encontrados en la literatura reciente.

En el Capítulo 3 se da la formulación matemática del problema que origina el presente estudio y se comenta sobre su complejidad. En el Capítulo 4 se formulan las relajaciones lagrangianas que se proponen para encontrar conjuntos que acoten inferiormente al conjunto de soluciones no dominadas. En este capítulo se presenta también una heurística diseñada para encontrar soluciones factibles que se utilizan en el método de optimización por subgradiente con el que se resuelve el problema dual lagrangiano. Así mismo en este capítulo se presentan unas desigualdades validas que pueden ser añadidas a las relajaciones propuestas para mejorar los resultados que se obtengan.

En el Capítulo 5 se describe el experimento computacional realizado. Este tiene por finalidad, por una parte, ajustar los parámetros del método de optimización por subgradiente, por otra, valorar la calidad de las cotas que está entregando cada una de las dualizaciones propuestas. Por último en el Capítulo 6 se resumen las principales conclusiones y se dan las pautas para trabajos futuros.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

Como ha sido comentado en el capítulo anterior el problema que sirve de base al presente estudio se clasifica como NP-duro, lo que significa que cualquier algoritmo que pretenda encontrar la solución óptima global al problema tendrá un tiempo de ejecución que crece, en el peor de los casos, exponencialmente con el tamaño del problema.

En estos casos una alternativa es recurrir a desarrollos de métodos aproximados que puedan ofrecer soluciones al problema, que si bien no se puede garantizar que sean las óptimas, por lo menos garanticen estar suficientemente cercanas al óptimo.

Dado que en la Teoría de Aproximación son de vital importancia los conceptos de cotas y relajación y que en esta tesis se pretenden encontrar cotas a un problema con dos criterios de optimización, en este capítulo se explicarán los conceptos de acotación, relajación, así como algunos temas de la Programación Multiobjetivo que serán utilizados.

2.1 Relajación de un problema de optimización

Cuando uno se enfrenta a un problema de optimización difícil, una idea natural es remplazarlo por uno más simple con la idea de que este nuevo problema aporte una cota en el valor objetivo original y sea más fácil de resolver. Es decir, en el caso de un problema de minimización desearíamos entonces que este nuevo problema tuviera un valor óptimo al menos tan pequeño como el valor óptimo del problema original.

Una forma de lograr esto es ampliando el conjunto de soluciones factibles, de forma que uno optimice ahora sobre un conjunto mayor ó también reemplazando la función objetivo de minimizar por una función que tenga un valor igual ó más pequeño en todos los puntos factibles.

A continuación se define formalmente una relajación de un problema de minimización (Guignard, 2003):

El problema (RPmin): $\min\{g(x) : x \in W\}$ es una relajación del problema (Pmin): $\min\{f(x) : x \in V\}$, con W y V conjuntos de soluciones factibles, y variables de decisión x , si y solo si:

- (i) El conjunto factible de (RPmin) contiene el conjunto factible de (Pmin), es decir $V \subseteq W$ y
- (ii) Sobre el conjunto factible de (Pmin), el valor de la función objetivo de (RPmin) domina al valor de la función objetivo de (Pmin), es decir, $\forall x \in V, g(x) \leq f(x)$.

La pregunta que surge ahora es ¿cómo construir relajaciones interesantes? Una de las más utilizadas en el caso de problemas de programación entera es la relajación de programación lineal, que consiste en ignorar las restricciones de integralidad para las

variables. A continuación se presenta la definición formal de Relajación Lineal (Wolsey, 1998).

2.1.1 Relajación lineal

Consideremos un problema de programación entera (IPmin): $\min\{cx : x \in P \cap Z^n\}$, con Z es el conjunto de los números enteros, c es un vector fila de dimensión n y $P = \{x \in R_+^n : Ax \geq b\}$, donde A es una matriz $m \times n$, b un vector columna de dimensión m y R_+^n conjunto de los números reales positivos.

Una relajación lineal de (IPmin) se formula como el siguiente programa lineal:
(LPmin): $z^{LP} = \min\{cx : x \in P\}$. Nótese que $P \cap Z^n \subseteq P$ y la función objetivo es la misma, por lo tanto esto es claramente una relajación.

Otro tipo de relajación es la denominada relajación lagrangiana que describiremos a detalle a continuación (Wolsey, 1998).

2.1.2 Relajación lagrangiana

Sea el problema de programación lineal entera (IP) de la forma $z = \min\{cx : Ax \geq b, Dx \geq d, x \in Z_+^n\}$. Suponga que el conjunto de restricciones $Ax \geq b$ son “fáciles” en el sentido que un problema de programación entera con solo estas restricciones es fácil de resolver. Dicho de otro modo, si se quitan las restricciones “complicadas” $Dx \geq d$, el problema resultante es más fácil de resolver que el problema original (IP).

Ahora bien, una relajación consistente simplemente en eliminar estas restricciones “complicadas” puede arrojar resultados débiles, porque se estarían ignorando totalmente algunas restricciones que pueden ser importantes para el problema en cuestión. Una forma de tratar esta complicación es por medio de la relajación lagrangiana.

Consideremos el problema de programación lineal entera de una forma más general:

$$\begin{aligned} \text{(IP)} : \quad & z = \min cx \\ & Dx \geq d \\ & x \in X \end{aligned}$$

donde $Dx \geq d$ son m restricciones complicadas y el resto de las restricciones se han considerado en X . Para algún valor de $u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \geq 0$, definamos el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{(IP}(u)) : \quad & z(u) = \min cx + u(d - Dx) \\ & x \in X \end{aligned}$$

donde las restricciones complicadas o difíciles de IP han sido agregadas a la función objetivo de $\text{IP}(u)$ afectadas por un término de penalización: $u(d - Dx)$.

Nótese que:

- la región factible de IP esta contenida en la región factible de $\text{IP}(u)$, es decir $\{x : Dx \geq d, x \in X\} \subseteq X$,
- además, como $u \geq 0$ y $d - Dx \geq 0$ para todo $x \in X$, entonces para el valor de la función objetivo se cumple que $cx - u(d - Dx) \geq cx$.

Por consiguiente, el problema $IP(u)$ es una relajación del problema IP para todo $u \geq 0$. A esta relajación se le conoce como relajación lagrangiana. y el vector u se denomina precio, variable dual o multiplicador de Lagrange asociado con la restricción $Dx \geq d$.

Como $IP(u)$ es una relajación de IP , entonces para cualquier $u \geq 0$ se tiene $z(u) \leq z^*$, obteniéndose una cota inferior del valor óptimo de IP .

Para encontrar la mejor cota inferior (es decir, la mayor) sobre la infinidad de posibles valores de u se necesita resolver el siguiente problema, el cual se denomina “Problema del dual lagrangiano (LD)”:

$$w_{LD} = \max\{z(u) : u \geq 0\}$$

donde se ha formado una función lagrangiana $z(u)$.

Nótese que este es un problema en el espacio dual de los multiplicadores lagrangianos, mientras que $IP(u)$ es un problema en el espacio de las x .

Es importante mencionar aquí que una solución óptima $x(u)$ de $IP(u)$ para algún u , que sea factible del problema entero original IP , es decir, que satisfaga las restricciones dualizadas, no necesariamente es óptima para IP . Para que esto se cumpla es necesario que se satisfagan además las condiciones de holgura complementaria.

En algunos casos la cota ofrecida por la relajación lagrangiana no es mejor que la ofrecida por la relajación lineal. Esto ocurre cuando la relajación lagrangiana $IP(u)$ tiene la propiedad de integralidad, esto es, si la envolvente convexa (Co) coincide con el espacio de soluciones factibles. Sin embargo, aún en estos casos todavía puede ser útil

calcular la cota lagrangiana. Por ejemplo, cuando la relajación lineal no puede ser calculada fácilmente, porque existe un número exponencial de restricciones.

En Optimización Combinatoria mono-objetivo disponer de cotas superiores e inferiores $l, u \in R$ (conjunto de números reales), con $l \leq \min\{cx : x \in X\} \leq u$ ha sido una herramienta esencial para resolver problemas NP-duros mediante métodos aproximados. La teoría de aproximación está basada en cotas. Ellas permiten el desarrollo de algoritmos con tasas de desempeño que garantizan que las soluciones heurísticas están dentro de un cierto porcentaje de la optimalidad.

Las cotas también se usan en técnicas de enumeración implícita, tales como Ramificación y Acotamiento ó Programación Dinámica para resolver problemas de optimización combinatoria donde el desempeño de los algoritmos depende de la calidad de las cotas.

A partir de estas experiencias es de esperar que los procedimientos de acotación también sean herramientas valiosas para los problemas combinatorios multiobjetivo como el que se aborda en esta tesis. Sin embargo, se necesita un concepto diferente de “acotamiento” para lidiar con el concepto diferente de “optimalidad” en la Optimización Multiobjetivo.

Consideramos oportuno ahora explicar algunos conceptos importantes de la Programación Multiobjetivo a los que estaremos haciendo referencia a lo largo de este trabajo.

2.2 Optimización multiobjetivo

Cuando alguna persona elabora algún plan, puede tener más de un objetivo y es muy común que esos diversos objetivos estén en conflicto. Lo anterior quiere decir que no pueden ser comparados o combinados directamente, en el sentido de que para producir mayores réditos en un objetivo se tiende a sacrificar los requerimientos de otro. Por ello, en general no es posible optimizar simultáneamente todos los objetivos (Eppen y Gould, 1987).

Por ejemplo, considérese a un planificador de una corporación cuyas metas a largo plazo consisten en:

- 1.-maximizar las utilidades descontadas.
- 2.-maximizar la participación en el mercado al término del período de planeación.
- 3.-maximizar el capital contable existente al final de dicho período.

Estas metas no pueden ser comparadas en forma directa y además están en conflicto ya que, gastar pocos dólares en publicidad (menos mercadeo) permite la construcción de nuevas plantas (mayor capital contable) y la compra de más materia prima (mayor producción).

En palabras, el problema de optimización multiobjetivo puede definirse como el problema de encontrar (Coello, Van y Lamont, 2002):

“Un vector de variables de decisión, el cual satisface las restricciones y optimiza una función vectorial, cuyas componentes o elementos son las funciones objetivos. Estas funciones forman una descripción matemática de los criterios de desempeño, los cuales usualmente están en conflicto unos con otros. Por tanto, el término “optimizar” significa encontrar una solución la cual daría, para todas las funciones objetivos, valores aceptables para el tomador de decisiones”.

Matemáticamente, un problema de optimización multiobjetivo puede ser formulado de la siguiente manera (Ehrgott, 2005):

$$\begin{aligned} \min f(x) &= (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \\ \text{sujeto a} \\ x &\in X \end{aligned}$$

donde X denota el conjunto de las soluciones factibles.

Aunque los problemas de optimización mono-objetivo pueden tener una única solución óptima, los problemas multiobjetivo, como regla, presentan un conjunto (posiblemente no contable) de soluciones. Estas soluciones, al ser evaluadas, producen vectores cuyas componentes representan compromisos en el espacio objetivo.

Teniendo varias funciones objetivo, la noción de “óptimo” cambia, porque ahora el objetivo es encontrar buenos compromisos, en lugar de encontrar una sola solución como sucede en optimización global. La noción de “óptimo” más comúnmente utilizada es la generalizada por Pareto y que describiremos a continuación.

2.2.1 Soluciones eficientes y puntos no dominados

Consideremos un problema de optimización multiobjetivo como el definido anteriormente. Una solución factible $x \in X$ es llamada solución eficiente u óptimo de Pareto si ninguna solución es tan buena como ella para todos los objetivos y estrictamente mejor para al menos un objetivo.

Más formalmente, una solución \hat{x} es eficiente si no existe otro $x \in X$ tal que $f_k(x) \leq f_k(\hat{x})$ para $k=1, \dots, p$ y $f_i(x) < f_i(\hat{x})$ para algún $i \in \{1, \dots, p\}$. Si \hat{x} es eficiente u óptima de Pareto entonces $f(\hat{x})$ es llamado punto no dominado. Si $x^1, x^2 \in X$ y $f_i(x^1) \leq f_i(x^2), \forall i \in \{1, \dots, p\}$ se dice que x^1 domina a x^2 y $f(x^1)$ domina a $f(x^2)$. El conjunto de todas las soluciones eficientes $\hat{x} \in X$ es denotado como X_E y llamado el conjunto eficiente. El conjunto de todos los puntos no dominados $\hat{y} = f(\hat{x})$ donde $\hat{x} \in X_E$ es denotado Y_N y llamado el conjunto no-dominado (Ehrgott, 2005).

La importancia fundamental de la eficiencia (optimalidad de Pareto) está basada en la observación de que cualquier x que no sea eficiente no puede representar la alternativa preferida para el tomador de decisiones porque existe al menos otra solución factible $x' \in X$ tal que $f_k(x') \leq f_k(x)$ para todo $k=1, \dots, p$ con la desigualdad estricta al menos una vez. Es decir, x' debe ser obviamente preferido antes que x .

El conjunto Pareto optimal es el conjunto de aquellas soluciones cuyos correspondientes vectores objetivo son no dominados con respecto a todos los otros vectores de comparación. Cuando las soluciones Pareto optimales se grafican en el espacio objetivo, los vectores no dominados se conocen como Frente o Conjunto de Pareto. Es decir, el conjunto Pareto óptimo se ve en el espacio de las soluciones, mientras que el frente de Pareto se ve en el espacio de las funciones objetivos.

Frecuentemente el tomador de decisiones selecciona soluciones mediante la elección de desempeños objetivos aceptables, lo cual es representado por el Frente de Pareto. Escoger una solución que optimiza solo un objetivo puede que ignore soluciones que son “mejores” desde un punto de vista general.

Identificar un conjunto de soluciones Pareto optimal es por tanto fundamental para que el tomador de decisiones seleccione una solución compromiso que satisfaga los objetivos lo mejor posible.

2.2.2 Clasificación de los métodos de optimización multiobjetivo

En la actualidad los métodos analíticos para manejar objetivos múltiples no han sido aplicados en la práctica con la misma frecuencia que otros métodos tales como la Programación Lineal. Se han desarrollado varios enfoques para resolver dichos problemas tales como (Collette y Siarry, 2003):

- Métodos escalares
- Métodos interactivos
- Métodos difusos
- Métodos que usan alguna metaheurística
- Métodos de ayuda a la decisión.

Los métodos en estos cinco conjuntos pueden ser listados en tres familias de métodos de optimización multiobjetivo:

1. Técnicas *a priori*: Con estos métodos se toma la decisión de a cuál objetivo se le dará más preferencia antes de buscar la soluciones. Es decir, el tomador de decisiones define el compromiso a ser aplicado (muestra sus preferencias) antes de correr el método de optimización. Es decir, decidir entonces buscar.
2. Técnicas *a posteriori*: Con estos métodos se buscan las soluciones antes de tomar la decisión de a cuál objetivo se le dará más preferencia. Aquí, el tomador de decisiones escoge la solución mediante el análisis de las soluciones calculadas por el método de optimización. Es decir, buscar entonces decidir. Los métodos

que pertenecen a esta familia producen, al final de la optimización, una superficie de compromiso.

3. Técnicas progresivas: Con estos métodos se integra la búsqueda de las soluciones y la decisión de a cuál objetivo se le dará más preferencia. Es decir, durante la ejecución del método de optimización, el tomador de decisiones mejora el compromiso a ser aplicado. Es decir, buscar entonces decidir y decidir entonces buscar progresivamente. A ella pertenecen los métodos interactivos

Sin embargo, existen métodos de optimización multiobjetivo que no se ajustan exclusivamente a una familia, por lo que esta clasificación nos da solamente una idea de qué metodología debemos seguir para producir cierto resultado. Clasificaciones más refinadas pueden verse por ejemplo en Collette y Siarry (2003).

A continuación se presenta uno de las técnicas más conocida para resolver problemas de optimización multiobjetivo, la cual es un método escalar clasificado como una técnica *a posteriori*.

2.2.3 Método ε -restringido

El método ε -restringido (ε -R) consiste en que solamente una función objetivo del problema original es minimizada, mientras los demás objetivos son transformados en restricciones (C. A. Coello, D. A. Van y Lamont, 2002). El problema de optimización multiobjetivo se sustituye por el siguiente problema de ε -restringido:

$$\begin{aligned} & \min_{x \in X} f_j(x) \\ & \text{sujeto a} \\ & f_k(x) \leq \varepsilon_k \quad k = 1 \dots p \quad k \neq j. \end{aligned}$$

Donde $\varepsilon \in R^p$ son valores de cada función objetivo que no deben ser excedidos.

La idea de este método es minimizar una función objetivo a la vez (la más preferida), considerando los otros objetivos como restricciones acotadas por algunos niveles permisibles para ε_k .

Variando este nivel ε_k pueden obtenerse las soluciones no dominadas del problema. Es muy importante estar consciente de que se requiere de un análisis preliminar para identificar los puntos iniciales adecuados para el nivel ε_k . Para obtener valores adecuados para ε_k , normalmente se conducen optimizaciones mono-objetivo para cada función objetivo en turno mediante las técnicas de programación matemática.

Ilustremos el método a través de un ejemplo sencillo donde se tiene un problema de maximización bi-objetivo con objetivos en conflicto, es decir, que al aumentar los réditos de un objetivo se tiende a sacrificar el otro objetivo.

Sea:

$$\max \quad z = (-x_1 + x_2, x_1 + 2x_2)$$

$$\text{sujeto a} \quad -x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$x_1 + x_2 \leq 8$$

$$x_1 \leq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

La Figura 2.1 corresponde a la región factible F en el espacio de decisiones R^2 , y la Figura 2.2, a la región factible $Z = z(F)$ en el espacio de objetivos R^2 . En ambas, se han marcado en negrita los correspondientes conjuntos eficientes, donde $A = (0,4)$, $B = (2.67, 5.34)$, $A' = (4,8)$ y $B' = (2.67, 13.35)$.

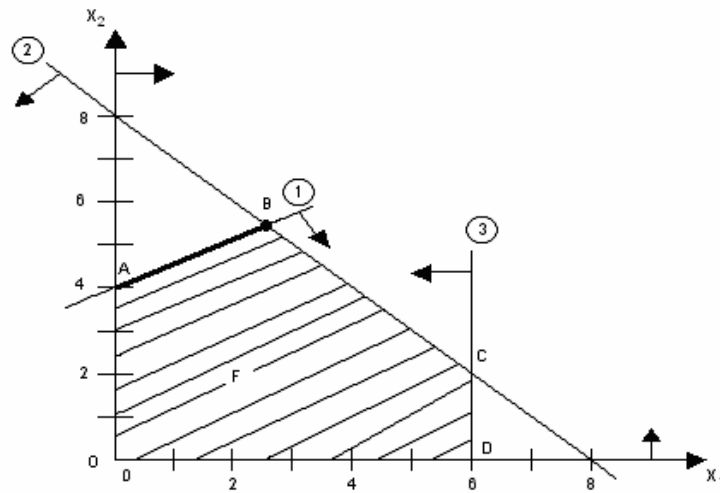


Figura 2.1. Región factible F del problema bi-objetivo.

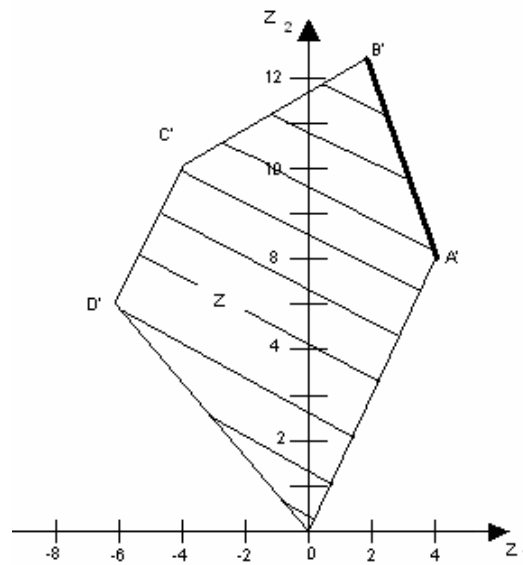


Figura 2.2. Región factible Z en el espacio de objetivos.

Al utilizar el método ε -R para resolver este ejemplo, tomaremos como objetivo más importante el z_1 , y como meta para el objetivo z_2 , el valor $\varepsilon_2=10$.

Para ello, formulamos el programa lineal mono-objetivo

$$P \left\{ \begin{array}{l} \max z_1 = -x_1 + x_2 \\ \text{sujeto a} \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1, x_2 \geq 0 \\ z_2 = x_1 + 2x_2 \geq 10 \end{array} \right.$$

Su solución, obtenida con el método simplex, es $x_1^* = 1$, $x_2^* = 4.5$ con $z_1^* = 3.5$ y $z_2^* = 10$. El óptimo es único y, por tanto, es un punto eficiente.

Las Figuras 2.3 y 2.4 muestran las regiones factibles en el espacio de decisiones y objetivos, respectivamente, que constituyen subregiones del problema original. El punto A es la solución óptima de P y A' su imagen en el espacio de objetivos.

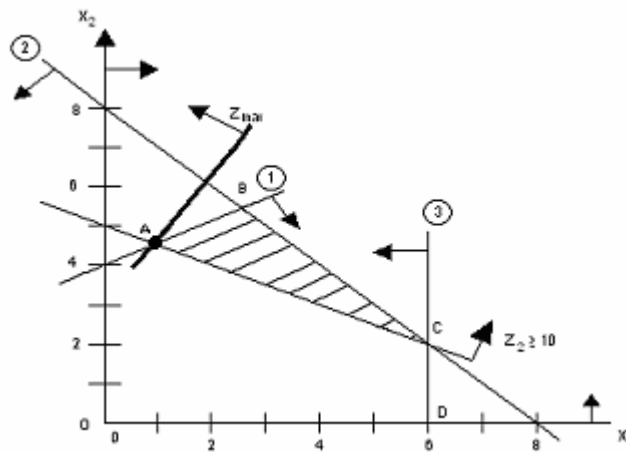


Figura 2.3. Región factible en el espacio de decisiones

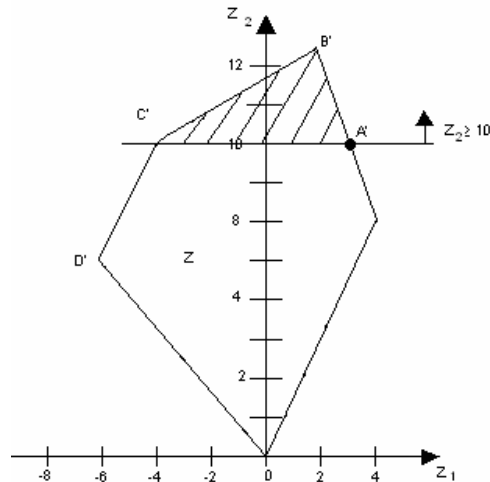


Figura 2.4. Región factible en el espacio de objetivos.

Note que en este caso se ha asignado un valor de 10 a ε_2 , sin embargo como se comentó anteriormente es muy importante el valor que se le asignará a este parámetro.

Considerando un problema bi-objetivo de minimización, una forma de obtener el rango donde tiene sentido que varíe el parámetro ε es la siguiente:

1. Minimizar primeramente la función f_1 , ignorando completamente la función f_2 . Al evaluar en f_2 la solución obtenida, se tendrá el mayor valor que puede tomar el parámetro ε .
2. Minimizar la función f_2 , ignorando f_1 y así tendremos el menor valor que puede tomar ε .

A partir del reconocimiento del concepto diferente de optimalidad en optimización multiobjetivo, se desprende la necesidad de un concepto diferente de “acotamiento”. A continuación se explican las cotas más conocidas en optimización multiobjetivo.

2.3 Cotas en problemas de optimización multiobjetivo

El punto ideal y el punto nadir constituyen una cota inferior y superior respectivamente de los puntos no dominados. Estos puntos dan una indicación del rango de valores que pueden alcanzar los puntos no dominados. A menudo son usados como puntos de referencia en métodos interactivos para encontrar la solución preferida por el tomador de decisiones (Ehrgott, 2005).

Como se mencionaba anteriormente el conjunto de todas las soluciones eficientes es denotado como X_E y denominado conjunto eficiente. El conjunto de todos los puntos no dominados es denotado Y_N y denominado conjunto no dominado. Ahora suponga que X_E y Y_N son conjuntos no vacíos y se quiere encontrar números reales $\underline{y}_k, \bar{y}_k$ para todo $k = 1, \dots, p$ con $\underline{y}_k \leq y_i \leq \bar{y}_k$ para todo $y \in Y_N$. Una posibilidad obvia es escoger:

$$\underline{y}_k = \min_{y \in Y} y_i$$

$$\bar{y}_k = \max_{y \in Y} y_i$$

Si bien la cota inferior es fuerte (ya que siempre hay un punto eficiente $y \in Y_N$ con $y_k = \underline{y}_k$), la cota superior tiende a estar muy lejos de los puntos no dominados. Por esta razón la cota superior es definida sobre el máximo de los puntos no dominados solamente.

Las definiciones formales son como sigue:

Punto Ideal: El punto $y^I := (y_1^I, y_2^I, \dots, y_p^I)$ con $y_k^I := \min_{x \in X} f_k(x) = \min_{y \in Y} y_k$ es llamado el punto ideal del problema de optimización multiobjetivo $\min_{x \in X} (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))$.

Punto Nadir: El punto $y^N := (y_1^N, y_2^N, \dots, y_p^N)$, con $y_k^N := \max_{x \in X_E} f_k(x) = \max_{y \in Y_N} y_k$ es llamado el punto nadir del problema de optimización multiobjetivo .

Obviamente se tiene que $y_k^I \leq y_k$ y $y_k \leq y_k^N$ para cualquier $y \in Y_N$. Además, y^I y y^N son cotas fuertes inferiores y superiores respectivamente sobre el conjunto eficiente. El punto ideal se encuentra resolviendo p problemas de optimización mono-objetivo, por lo que puede considerarse que es fácil de calcular (desde el punto de vista multicriterio). Sin embargo, el cálculo de y^N implica optimizar sobre el conjunto eficiente, lo cual es un problema muy difícil. Debido a esta dificultad, a menudo se utilizan heurísticas para calcular y^N u obtener una estimación \tilde{y}^N para el valor de y^N .

Los beneficios de utilizar como cotas los valores ideal y nadir son limitadas por varias razones (Ehrgott y Gandibleux, 2007):

1.- y^I es difícil de obtener si

$$\min f_k(x)$$

sujeto a

$$x \in X$$

es NP-duro, ya que para hallarlo se tendrían que resolver p problemas NP-duro.

2.- y^N es difícil de obtener si $p > 2$, aún si los problemas mono-objetivo $\min\{f_k(x): x \in X\}$ son polinomialmente solubles. Más aún, las heurísticas para calcular y estimar \tilde{y}^N pueden subestimar y^N , es decir, producir $\tilde{y}^N \leq y^N$ entregando un punto no útil como una cota superior para Y^N .

3.- Por último, los valores ideal y nadir están lejos de la mayoría de los puntos no dominados, esto es debido al número usualmente grande de puntos no dominados en Y^N y la naturaleza conflictiva de los objetivos, considerando que y^I y y^N muestran los mejores y peores valores de todos los objetivos sobre el rango de Y^N .

En el presente trabajo se propone no un valor acotador, sino un conjunto de puntos que acota inferiormente al conjunto de puntos no dominados.

2.4 Trabajos relacionados

La relajación lagrangiana es una poderosa familia de herramientas para resolver de forma aproximada problemas de programación entera. Ella provee:

- cotas más fuertes que las que aporta la relajación lineal cuando el problema no tiene la propiedad de integralidad lineal.
- Buenos puntos iniciales para búsquedas heurísticas.

Por ello, se puede encontrar una literatura muy amplia dedicada al uso de las relajaciones lagrangianas, bien sean insertadas dentro de algún método exacto como por ejemplo ramificación y acotación o en algún esquema heurístico.

Entre los trabajos más recientes podemos citar, por ejemplo, el trabajo de Holmberg y Yuan (2000) en un problema de diseño de red capacitada con múltiples productos y cargos fijos en los arcos, muy común en el contexto de redes de transporte. Aquí diseñan una heurística lagrangiana dentro de una estructura de ramificación y acotación.

Así mismo, existen diversos trabajos donde se describe la utilidad de la relajación lagrangiana en la solución de problemas de ubicación de instalaciones tanto en ambientes estáticos como dinámicos. Aquí se pueden mencionar numerosos trabajos de Diéguez Galvao desde los años 80, por ejemplo, su aplicación a problemas de cubrimiento de conjuntos (1993).

Relacionados con el diseño de cadenas de suministro podemos citar varios trabajos recientes entre los que destacan el de Eskigun et al. (2005), quienes desarrollan una heurística lagrangiana en un problema donde consideran tiempos guías, capacidad en los centros de distribución a ubicar y selección del modo de transporte. Este trabajo aborda la cadena de suministro de una compañía automotriz que consiste en las actividades involucradas en la transportación de los vehículos terminados desde las plantas de ensamblaje hasta los distribuidores. Los centros de distribución son usados para consolidar y distribuir los vehículos desde diferentes plantas hasta los distribuidores. El número y ubicación de las plantas es conocido, así como un conjunto de posibles ubicaciones de centros de distribución. Los vehículos producidos en las plantas son cargados en tren y entregados a los centros de distribución, donde ahora el producto es cargado en camión y enviado a los distribuidores o área de demanda. Además, los vehículos pueden ser entregados directamente de las plantas a los distribuidores por medio de camión, si el área de demanda está relativamente e igual las plantas. El objetivo de este problema es minimizar el costo total dado por la suma del costo de transportación, el costo del tiempo guía y costos fijos por abrir centros de distribución. La heurística lagrangiana presentada por los autores entrega soluciones de calidad en tiempo computacional razonable.

Otra aplicación de la relajación lagrangiana para generar soluciones factibles de calidad en redes de suministro es publicada por Elhedhli y Gzara (2008) para un problema de ubicación de instalaciones capacitado que decide no solamente dónde ubicar las plantas y sus capacidades, sino también la selección de tecnología. El problema es modelado como una cadena de suministro con tres etapas, donde se desea minimizar el costo de producción y transportación de los productos entre las plantas y

los almacenes, el costo de envío y manipulación entre los almacenes y los clientes, agregando el costo fijo de apertura y el equipamiento de las plantas y los almacenes con la tecnología necesaria.

Duni, Eksioglu y Edwin (2007) diseñan una heurística lagrangeana para un problema integrado de planeación de la producción y planificación del transporte en una cadena de suministro de dos etapas, dinámica y multi-producto. Este trabajo consiste en la coordinación de las decisiones de producción, inventario y transportación de K productos sobre una planeación de T períodos. En este caso hay F instalaciones que producen y envían el producto final a R centros de distribución. Las instalaciones tienen la misma capacidad de producción en el sentido de que cada producto puede ser producido en cada instalación. Los costos por unidad de producción, de transportación y de inventario difieren entre las instalaciones. El objetivo es decidir una programación de producción para cada producto, tal que la suma de los costos de producción, transportación e inventario en todas las instalaciones sea minimizada.

Otros trabajos interesantes y con algunas características similares a las del problema abordado en esta tesis son los publicados por Tragantalerngsak, Holt y Rönnqvist (1997, 2000). Estos artículos tratan con un problema particular de ubicación de instalaciones en cadenas de dos etapas, donde se ubican instalaciones tanto en una como en la otra etapa. Cada instalación en la segunda etapa tiene una capacidad limitada y puede ser abastecida solamente por una instalación o planta de la primera etapa. Además, cada cliente es servido por solo una instalación en la segunda etapa. El modelo propuesto determina simultáneamente cuántos almacenes y vehículos se necesitan, la ubicación de los almacenes abiertos, cuáles vehículos deben operar a partir de cuáles de los almacenes abiertos y los clientes servidos por cada vehículo con el objetivo de minimizar el costo total. En el primer trabajo los autores proponen un modelo matemático para este problema y consideran seis heurísticas basadas en relajación lagrangiana para su solución. En el segundo artículo proponen un algoritmo de ramificación y acotación basado en relajación lagrangiana.

Todos los trabajos mencionados anteriormente se relacionan de alguna u otra forma con el problema que se abordará en esta tesis, aunque existen muchas diferencias entre ellos. Sin embargo, una de las diferencias más importantes es que todos los anteriores son problemas mono-objetivo. No se ha encontrado en la literatura un estudio de obtención de conjuntos acotadores basados en relajación lagrangiana para un problema bi-objetivo de diseño de cadena de suministro como el aquí planteado.

CAPÍTULO 3

FORMULACIÓN MATEMÁTICA DEL PROBLEMA

3.1 Planteamiento del problema

El problema que se estudia en la presente tesis fue propuesto por Olivares-Benítez (2007) como parte de su investigación doctoral. Este problema se centra en la fase de planeación estratégica de redes cadenas de suministro de dos etapas y la descripción y modelación matemática establecida por Olivares-Benítez se presenta a continuación.

En la primera etapa de la cadena las plantas manufactureras envían el producto a los almacenes o puntos de concentración y la segunda etapa corresponde al flujo del producto desde los almacenes hacia los centros de distribución. Tanto el número como la ubicación de las plantas y los centros de distribución se conocen de antemano.

Así mismo existe un conjunto de ubicaciones potenciales para abrir los almacenes o puntos de concentración, pero el número de almacenes a abrir no está definido a priori.

Cada sitio candidato tiene asociado un costo fijo por abrir allí una instalación, así como una capacidad finita para dicha instalación. Esta capacidad significa una capacidad de despacho, la cual depende en general de condiciones físicas, equipamiento y productividad.

Las plantas, por su parte, tienen una capacidad de manufactura limitada, la cual representa la tasa de producción en la planta.

Una de las características más importantes del problema es que se consideran varias opciones para el transporte del producto entre instalaciones en cada etapa de la red. Cada opción representa un tipo de servicio y se describe a través del costo de transportación y el tiempo de entrega entre instalaciones. Las diferencias de los servicios de transportación se tienen por la oferta de varias compañías, la disponibilidad de diferentes tipos de servicio como expreso y regular en cada compañía y el uso de diferentes modos de transportación como camioneta, tren, avión etc. Comúnmente estas diferencias implican una correspondencia inversa entre el costo y el tiempo, es decir, entre más rápido sea un servicio entonces este será más caro. Esto es modelado mediante la inclusión de arcos múltiples entre cada par de nodos de la red.

Cada centro de distribución (CD) tiene una demanda que debe ser satisfecha en su totalidad, sin embargo se tiene la restricción de que la misma sea abastecida desde un solo almacén. No existen otras restricciones físicas aparte de ésta y la de respetar las capacidades de las plantas y los almacenes que se abran.

Por un lado la idea de este problema es seleccionar los sitios apropiados para abrir almacenes y el flujo entre las instalaciones de tal forma que se minimice el costo combinado de transportación y por abrir alguna instalación. Por otro lado el problema intenta minimizar el tiempo de transportación de las plantas a los centros de distribución. Esta parte determina cuáles servicios serán seleccionados para reducir el tiempo en cada nivel de la cadena de suministro.

El conflicto entre el costo y el tiempo clasifica este problema como un problema bi-objetivo, donde un criterio intenta minimizar el costo combinado de transportación y ubicación de instalación y el otro criterio intenta minimizar el tiempo de transportación del producto de las plantas a los almacenes y de los almacenes a los centros de distribución. El problema propuesto es mostrado en una red representativa en la Figura 3.1.

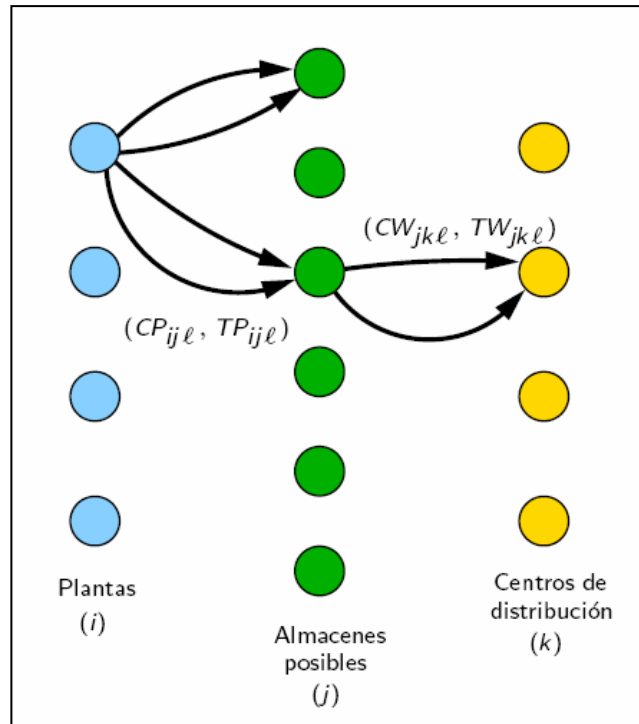


Figura 3.1. Representación de una red de cadena de suministro de dos etapas.

Modelo Matemático

Antes de escribir el modelo matemático es necesario definir la notación utilizada:

Conjuntos

I : conjunto de plantas; $i \in I$.

J : conjunto de almacenes; $j \in J$.

K : conjunto de centros de distribución (CD); $k \in K$.

LP_{ij} : conjunto de arcos o tipo de servicio entre nodos i y j ; $l \in LP_{ij}$.

LW_{jk} : conjunto de arcos o tipo de servicio entre nodos j y k ; $l \in LW_{jk}$.

Parámetros

CP_{ijl} : costo de transportar una unidad de producto de la planta i a el almacén j usando el arco ijl , es decir, el servicio l ; $i \in I, j \in J, l \in LP_{ij}$.

CW_{jkl} : costo de transportar una unidad de producto del almacén j al centro de distribución k usando el arco jkl , es decir, el servicio l ; $j \in J, k \in K, l \in LW_{jk}$.

TP_{ijl} : tiempo de transportar cualquier cantidad de producto de la planta i a el almacén j usando el arco ijl , es decir, cuando se usa el arco l ; $i \in I, j \in J, l \in LP_{ij}$.

TW_{jkl} : tiempo de transportar cualquier cantidad de producto del almacén j al centro de distribución (CD) k usando el arco jkl , es decir, cuando se usa el arco l ; $j \in J, k \in K, l \in LW_{jk}$.

MP_i : capacidad de la planta i ; $i \in I$.

MW_j : capacidad del almacén j ; $j \in J$.

D_k : demanda en el CD k ; $k \in K$.

F_j : costo fijo por abrir un almacén en la ubicación j ; $j \in J$.

Variables de decisión

X_{ijl} : cantidad transportada de la planta i al almacén j usando el arco ijl ; $i \in I, j \in J, l \in LP_{ij}$.

Y_{jkl} : cantidad transportada del almacén j a el CD k usando el arco jkl ; $j \in J, k \in K, l \in LW_{jk}$.

Z_j : variable binaria igual a 1 si el almacén j es abierto e igual a 0 en otro caso.
 $j \in J$

A_{ijl} : variable binaria igual a 1 si el arco ijl es usado para transportar producto de la planta i a el almacén j y es igual a 0 en otro caso; $i \in I, j \in J, l \in LP_{ij}$.

B_{jkl} : variable binaria igual a 1 si el arco jkl es usado para transportar producto del almacén j a CD k e igual a 0 en otro caso; $j \in J$, $k \in K$, $l \in LW_{jk}$.

Modelo matemático

$$\min (f_1(X, Y, Z), f_2(A, B)) \quad (3.1)$$

donde

$$f_1(X, Y, Z) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} CP_{ijl} X_{ijl} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} CW_{jkl} Y_{jkl} + \sum_{j \in J} F_j Z_j \quad (3.2)$$

$$f_2(A, B) = \max_j \left(\max_{i, l} (TP_{ijl} A_{ijl}) + \max_{k, l} (TW_{jkl} B_{jkl}) \right) \quad (3.3)$$

sujeto a:

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} = D_k \quad \forall k \in K \quad (3.4)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} \leq MP_i \quad \forall I \in I \quad (3.5)$$

$$MW_j Z_j - \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (3.6)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} - \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} = 0 \quad \forall j \in J \quad (3.7)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} = 1 \quad \forall k \in K \quad (3.8)$$

$$\sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} \leq 1 \quad \forall I \in I, j \in J \quad (3.9)$$

$$\sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} \leq 1 \quad \forall j \in J, k \in K \quad (3.10)$$

$$X_{ijl} - A_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (3.11)$$

$$Y_{jkl} - B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (3.12)$$

$$MP_i A_{ijl} - X_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (3.13)$$

$$MW_j B_{jkl} - Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (3.14)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} - Z_j \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (3.15)$$

$$X_{ijl}, Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (3.16)$$

$$Z_j, A_{ijl}, B_{jkl} \in \{0, 1\} \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (3.17)$$

En la formulación matemática del problema, la función objetivo (3.1) minimiza simultáneamente la suma del costo combinado de transportación y apertura de almacenes y la suma del tiempo máximo de transportación o también llamado tiempo guía de las plantas a los centros de distribución a través de cada almacén. En las ecuaciones (3.2) y (3.3) se describen con detalle. Se puede observar que la presencia de la ecuación (3.3) hace que el modelo matemático sea no lineal. Con el propósito de transformarlo en un modelo lineal se considerarán algunas variables auxiliares y se agregan algunas restricciones extras de la manera usual.

Variables auxiliares

T : variable auxiliar igual al tiempo máximo que toma enviar producto de alguna planta a algún CD.

E_j^1 : variable auxiliar igual al tiempo máximo en la primera etapa de la cadena de suministro para los almacenes activos j , i.e. $E_j^1 = \max_{i,l} (TP_{ijl} A_{ijl})$.

E_j^2 : variable auxiliar igual al tiempo máximo en la segunda etapa de la cadena de suministro para los almacenes activos j , i.e. $E_j^2 = \max_{k,l} (TW_{jkl} B_{jkl})$

Restricciones extras:

$$T - E_j^1 - E_j^2 \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (3.18)$$

$$E_j^1 - TP_{ijl} A_{ijl} \geq 0 \quad \forall i \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (3.19)$$

$$E_j^2 - TW_{jkl} B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (3.20)$$

Es evidente que las variables A_{ijl} y B_{jkl} solo tomarán valores positivos, en caso que el correspondiente almacén j sea abierto, por lo que entonces la ecuación (3.3) considera las rutas a través de almacenes abiertos y minimiza el tiempo máximo de transporte sobre la cadena de suministro.

Ahora, al introducir estas variables auxiliares al modelo, junto con las restricciones (3.18)-(3.20), la ecuación (3.3) puede escribirse como:

$$f_2 = T$$

y el modelo resultante es como sigue:

Modelo matemático linealizado

$$\min (f_1(X, Y, Z), f_2(A, B)) \quad (3.21)$$

donde

$$f_1(X, Y, Z) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} CP_{ijl} X_{ijl} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} CW_{jkl} Y_{jkl} + \sum_{j \in J} F_j Z_j \quad (3.22)$$

$$f_2(A, B) = T \quad (3.23)$$

sujeto a:

$$T - E_j^1 - E_j^2 \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (3.24)$$

$$E_j^1 - TP_{ijl} A_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (3.25)$$

$$E_j^2 - TW_{jkl} B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (3.26)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} = D_k \quad \forall k \in K \quad (3.27)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} \leq MP_i \quad \forall I \in I \quad (3.28)$$

$$MW_j Z_j - \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (3.29)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} - \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} = 0 \quad \forall j \in J \quad (3.30)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} = 1 \quad \forall k \in K \quad (3.31)$$

$$\sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} \leq 1 \quad \forall I \in I, j \in J \quad (3.32)$$

$$\sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} \leq 1 \quad \forall j \in J, k \in K \quad (3.33)$$

$$X_{ijl} - A_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (3.34)$$

$$Y_{jkl} - B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (3.35)$$

$$MP_i A_{ijl} - X_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (3.36)$$

$$MW_j B_{jkl} - Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (3.37)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} - Z_j \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (3.38)$$

$$T, E_j^1, E_j^2, X_{ijl}, Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (3.39)$$

$$Z_j, A_{ijl}, B_{jkl} \in \{0,1\} \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (3.40)$$

Las restricciones (3.24)-(3.26), anteriormente (3.18)-(3.20), fueron comentadas arriba. La restricción (3.27) se refiere a la satisfacción de la demanda para cada centro de distribución. La restricción (3.28) es formulada para no exceder los límites de capacidad de cada planta. La restricción (3.29) garantiza que el flujo que sale de un almacén no exceda su capacidad, pero a su vez garantiza que el flujo del producto solo se realice a través de los almacenes que se abren. La restricción (3.30) mantiene el balance del flujo en los almacenes. La restricción (3.31) establece que cada centro de distribución debe ser abastecido por una sola fuente o almacén. Las restricciones (3.32) y (3.33) obligan a que a lo sumo un arco sea seleccionado entre los nodos $i-j$ y $j-k$ en cada etapa de la cadena de suministro, respectivamente. Las restricciones (3.34) y (3.35) establecen que no se abra o active un arco si no circula flujo a través de él. Las restricciones (3.36) y (3.37) aseguran que el flujo del producto solo se realice a través de arcos activos. La restricción (3.38) establece que un almacén no se abra si no existen arcos activos incidentes en él, es decir, si no recibe flujo de producto. Por último, las restricciones (3.39) y (3.40) se refieren al tipo de las variables involucradas en el modelo.

Nótese que la presencia de la restricción (3.31) implica que el problema tiene solución factible si y solo si para cada centro de distribución existe al menos un almacén con suficiente capacidad para satisfacer su demanda.

3.2 Complejidad del problema

Un punto muy importante que debe discutirse es la dimensión del modelo. A continuación se presenta un pequeño análisis sobre las variables y restricciones presentes en el modelo (Olivares-Benítez, 2007).

En la Tabla 3.1 se muestra el número total de variables y el número total de variables binarias involucradas en el modelo y en la Tabla 3.2 se muestra el número total de restricciones.

Variables	Número de variables
Z_j	$ J $
A_{ijl}	$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} LP_{ij} $
B_{jkl}	$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} LW_{jk} $
X_{ijl}	$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} LP_{ij} $
Y_{jkl}	$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} LW_{jk} $
E_j^1	$ J $
E_j^2	$ J $
T	1
Total de variables	$1 + 3 J + 2 \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} LP_{ij} + 2 \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} LW_{jk} $
Total de variables binarias	$ J + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} LP_{ij} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} LW_{jk} $

Tabla 3.1. Número de variables en el modelo

Ejemplifiquemos con una instancia en particular de tamaño similar a las instancias reales, por ejemplo, $|I| = 50$, $|J| = 50$, $|K| = 100$. Si bien no todas las instalaciones tienen necesariamente diferentes opciones de transportación, en este caso se considerará que todas las instalaciones tienen las mismas opciones, específicamente, $|LP_{ij}| = 2 \forall i \in I, j \in J$, y $|LW_{jk}| = 2 \forall j \in J, k \in K$. Entonces, para esta instancia, el modelo tiene:

- 30,151 variables, de ellas 15,050 binarias.
- 52,950 restricciones en (3.24) – (3.38).

Restricción	Número de restricciones
(3.24)	$ J $
(3.25)	$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} LP_{ij} $
(3.26)	$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} LW_{jk} $
(3.27)	$ K $
(3.28)	$ I $
(3.29)	$ J $
(3.30)	$ J $
(3.31)	$ K $
(3.32)	$ I J $
(3.33)	$ J K $
(3.34)	$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} LP_{ij} $
(3.35)	$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} LW_{jk} $
(3.36)	$\sum_{i \in I} \sum_{j \in J} LP_{ij} $
(3.37)	$\sum_{j \in J} \sum_{k \in K} LW_{jk} $
(3.38)	$ J $
Número total de restricciones	$ I + 4 J + 2 K + I J + J K + 3 \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} LP_{ij} + 3 \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} LW_{jk} $

Tabla 3.2. Número de restricciones involucradas en el modelo

El problema en estudio fue clasificado como NP-duro por Olivares-Benítez (2007). El considera que el problema constituye una generalización de un problema clásico conocido como el problema de ubicación de instalaciones con costos fijos, el cual se clasifica como NP-duro. Una demostración más detallada se encuentra en Olivares-Benítez, González-Velarde y Ríos-Mercado (2008).

En este capítulo se ha presentado y formulado matemáticamente el problema que constituye el objeto de estudio de la presente tesis. Las observaciones anteriores justifican la necesidad de recurrir a métodos aproximados de solución.

Sin embargo, como se estableció en el Capítulo 1, nuestro objetivo no es proponer métodos de solución para resolverlo, sino proponer relajaciones lagrangianas que aporten conjuntos que acoten inferiormente al conjunto de soluciones no dominadas. Este estudio no es menos importante, dado que se requiere para poder evaluar la calidad de las soluciones que entreguen los métodos aproximados ó heurísticas de solución, como el reportado, por ejemplo, en Olivares-Benítez, González-Velarde y Ríos-Mercado (2007).

CAPÍTULO 4

METODOLOGÍA PARA LA OBTENCIÓN DE CONJUNTOS ACOTADORES

Después de describir los conceptos más generales que son utilizados a lo largo de la tesis, así como la formulación matemática del problema bajo estudio, en este capítulo se describe la metodología utilizada para encontrar un conjunto de puntos que acoten inferiormente al conjunto de puntos no dominados del problema.

En general la metodología está basada en relajaciones lagrangianas y consiste en proponer diferentes dualizaciones que posteriormente son evaluadas a través del experimento computacional descrito en el capítulo siguiente. Los mejores conjuntos acotadores que se encuentren aquí pueden servir para evaluar el desempeño de los algoritmos heurísticos que se propongan para encontrar soluciones al problema planteado.

En este capítulo, además de detallar las dualizaciones que han sido propuestas (sección 4.2), se proponen restricciones redundantes adicionales (Sección 4.3) que pueden llegar a contribuir a obtener mejores soluciones. Además, se describe el método

de optimización por subgradiente utilizado para resolver el problema dual (Sección 4.4) y se describe una heurística desarrollada para encontrar de forma rápida soluciones factibles al problema (sección 4.5). Estas soluciones se utilizan como cota superior para actualizar el valor de los multiplicadores en el método de optimización por subgradiente.

4.1 La relajación lineal y el método ε -R

Como ha sido mencionado, el objetivo de la tesis es obtener un conjunto de cotas inferiores de buena calidad, que permitan evaluar la calidad de los métodos aproximados que se propongan para resolver problemas de este tipo.

La manera mas fácil de obtener cotas inferiores es a través de la relajación de las restricciones de integralidad. Olivares-Benítez (2007) hizo algunos experimentos utilizando la relajación lineal (RL) y el método que utilizó para encontrar un conjunto de soluciones no dominadas de la relajación lineal fue el método ε -restringido.

Anteriormente se comentó que el método ε -R se basa en optimizar solo una medida de desempeño y las demás funciones objetivos se añaden como restricciones, las cuales son acotadas con un cierto parámetro. Olivares-Benítez en su trabajo observa que al utilizar el método ε -restringido optimizando f_1 y poniendo f_2 como restricción, las razones RL/MIP están más cercanas a 1 que las razones obtenidas cuando se optimiza f_2 , poniendo a f_1 como restricción. Es decir, las soluciones obtenidas de la relajación lineal están más cerca de las soluciones no dominadas del problema entero mixto en el caso en que se optimiza f_1 y f_2 pasa como restricción.

Otra observación importante es que de esta forma se obtiene un número mayor de soluciones no dominadas que cuando se escoge f_2 para optimizar y se pasa f_1 como restricción.

En el presente trabajo la relajación que se utiliza para obtener los conjuntos acotadores es la relajación lagrangiana. Para ello se debe estudiar cuáles restricciones deben ser relajadas o dualizadas, con la finalidad de obtener un problema más fácil de resolver. Como se comentó en el Capítulo 2, estas restricciones se incorporan a la función objetivo con una cierta penalidad.

Dado que en este trabajo se está tratando con un problema bi-objetivo, la pregunta natural que surge es : ¿A que función objetivo se añadirán las restricciones dualizadas?. Basándonos en las observaciones del trabajo de Olivares-Benítez, y dado que aquí también se utiliza el método ϵ -R para resolver los problemas relajados, las restricciones a dualizar fueron hechas en base a optimizar f_1 con f_2 como restricción. Es decir, las restricciones relajadas serán agregadas a f_1 con una cierta penalidad. Recuérdese que la función f_1 refleja el costo total (por transportación y apertura de instalaciones) y el objetivo f_2 refleja el tiempo requerido para completar toda la transportación. A continuación se describen las diferentes dualizaciones propuestas en este trabajo.

4.2 Descripción de las dualizaciones propuestas

Ante un problema de este tipo es difícil conocer a priori qué restricciones deben relajarse para obtener los mejores resultados. Por ello en el presente trabajo se proponen diferentes relajaciones que posteriormente son evaluadas.

Las dualizaciones siguientes han sido propuestas con la idea de obtener un problema más fácil de resolver. Específicamente, las relajaciones 1, 2 y 3 se desarrollan con el interés de obtener un problema lagrangiano que pueda descomponerse de alguna manera en problemas más pequeños, con la esperanza de que serán más fáciles y rápidos de resolver. Sin embargo, en todas ellas se está relajando la restricción que considera tomar el máximo tiempo de transportación del producto entre las instalaciones, lo que ocasiona que las funciones objetivo no estén en conflicto. Teniendo en cuenta lo anterior se desarrollan las dualizaciones 4 y 5.

4.2.1 Dualización 1

Recordemos primeramente que el problema bajo estudio se trata de una cadena de suministro de dos etapas, donde en la primera etapa se envía producto de las plantas a los almacenes que se abran y la segunda etapa corresponde al flujo del producto de los almacenes a los clientes o centros de distribución. La idea de esta dualización es separar el problema en dos subproblemas, es decir, separar el problema del envío de producto correspondiente a la primera etapa, del problema de flujo correspondiente a la segunda etapa, como se muestra en la Figura 4.1.

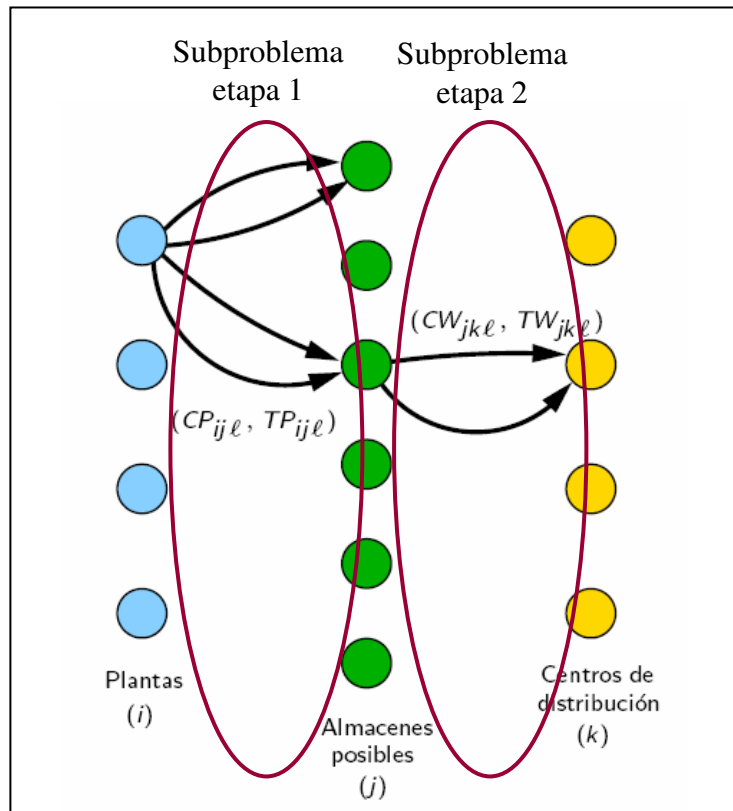


Figura 4.1. Representación grafica de separación del problema original

Lo anterior puede lograrse dualizando las restricciones (3.24), (3.29), (3.30), las cuales corresponden a la restricción de tomar el máximo tiempo de transporte entre instalaciones, la restricción que significa que el flujo que sale en cada uno de los almacenes no exceda la capacidad de cada uno de ellos y por ultimo la restricción de

balance que indica que todo el flujo que llega a los almacenes debe ser distribuido hacia los clientes. La formulación del dual lagrangiano 1 queda de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \min L(u, v, w) = & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} (CP_{ijl} + v_j) X_{ijl} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} (CW_{jkl} + u_j - v_j) Y_{jkl} \\ & + \sum_{j \in J} (F_j - u_j MW_j) Z_j - \sum_{j \in J} w_j T + \sum_{j \in J} w_j E_j^1 + \sum_{j \in J} w_j E_j^2. \end{aligned}$$

sujeto a

$$E_j^1 - TP_{ijl} A_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.1)$$

$$E_j^2 - TW_{jkl} B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.2)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} = D_k \quad \forall k \in K \quad (4.3)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} \leq MP_i \quad \forall I \in I \quad (4.4)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.5)$$

$$\sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} \leq 1 \quad \forall I \in I, j \in J \quad (4.6)$$

$$\sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} \leq 1 \quad \forall j \in J, k \in K \quad (4.7)$$

$$X_{ijl} - A_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.8)$$

$$Y_{jkl} - B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.9)$$

$$MP_i A_{ijl} - X_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.10)$$

$$MW_j B_{jkl} - Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.11)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} - Z_j \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (4.12)$$

$$T, E_j^1, E_j^2, X_{ijl}, Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (4.13)$$

$$Z_j, A_{ijl}, B_{jkl} \in \{0,1\} \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (4.14)$$

Con esto, el problema lagrangiano se puede separar en dos subproblemas de la siguiente forma, donde denotaremos por $L_1(u, v, w)$ al subproblema 1 sujeto a las ecuaciones (4.1), (4.4), (4.6), (4.8), (4.10) y (4.12). Al subproblema 2 se le denota $L_2(u, v, w)$ sujeto a las ecuaciones (4.2), (4.3), (4.5), (4.7), (4.9) y (4.11).

$$\min L(u, v, w) = L_1(u, v, w) + L_2(u, v, w)$$

La formulación del subproblema 1 corresponde a:

$$\min L_1(u, v, w) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} (CP_{ijl} + v_j) X_{ijl} + \sum_{j \in J} (F_j - u_j MW_j) Z_j + \sum_{j \in J} w_j E_j^1.$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} E_j^1 - TP_{ijl} A_{ijl} &\geq 0 & \forall i \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \\ \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} &\leq MP_i & \forall I \in I \\ \sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} &\leq 1 & \forall I \in I, j \in J \\ X_{ijl} - A_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \\ MP_i A_{ijl} - X_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \\ \sum_{i \in I} \sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} - Z_j &\geq 0 & \forall j \in J \\ E_j^1 X_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \\ Z_j, A_{ijl} &\in \{0,1\} & \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \end{aligned}$$

En el subproblema 1 están involucradas las variables $X_{ijl}, Z_j, A_{ijl}, E_j^1$, tanto en la función objetivo como en las restricciones. Nótese que no es posible particionar este subproblema en otros más pequeños, lo que nos indica que es necesario abordarlo en conjunto.

La formulación del subproblema 2 corresponde a:

$$\min L_2(u, v, w) = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} (CW_{jkl} + u_j - v_j) Y_{jkl} - \sum_{j \in J} w_j T + \sum_{j \in J} w_j E_j^2.$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} E_j^2 - TW_{jkl} B_{jkl} &\geq 0 & \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \\ \sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} &= D_k & \forall k \in K \\ \sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} &= 1 & \forall k \in K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} &\leq 1 && \forall j \in J, k \in K \\
Y_{jkl} - B_{jkl} &\geq 0 && \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \\
MW_j B_{jkl} - Y_{jkl} &\geq 0 && \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \\
T, E_j^2, Y_{jkl} &\geq 0 && \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \\
B_{jkl} &\in \{0,1\} && \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk}
\end{aligned}$$

Aquí se puede observar que en el subproblema 2 las variables Y_{jkl}, B_{jkl}, E_j^2 aparecen en las restricciones “tecnológicas”, mientras que la variable T está involucrada solamente en la función objetivo, y restricción de signo.

Las restricciones (4.6) y (4.5), las cuales corresponden a la satisfacción de la demanda del cliente o centro de distribución y a la restricción de que cada cliente debe ser abastecido por un solo almacén, hacen que este problema tenga cierta similitud con el problema de asignación generalizada, el cual está clasificado como NP-duro.

Por otra parte, se puede observar que este subproblema se puede particionar en problemas más pequeños, uno para cada cliente, lo que significa que aunque se pudiera ver como un problema de asignación generalizada es más conveniente tratarlo como problemas independientes más pequeños.

Con la misma idea de la dualización 1, pero con el objetivo de también obtener un subproblema de la etapa 1 que pueda particionarse en otros problemas más pequeños, se desarrolla una nueva dualización que se presenta a continuación.

4.2.2 Dualización 2

En este caso se considera relajar las mismas restricciones (3.24), (3.29), (3.30) del caso anterior, añadiendo la restricción (3.38), que establece que no se abra un almacén que no recibe flujo desde las plantas. Entonces, el modelo original se transforma en:

$$\begin{aligned}
\min L(u, v, w, q) = & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} (CP_{ijl} + v_j) X_{ijl} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} (CW_{jkl} + u_j - v_j) Y_{jkl} \\
& + \sum_{j \in J} (F_j - u_j MW_j + q_j) Z_j - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} q_j A_{ijl} - \sum_{j \in J} w_j T + \sum_{j \in J} w_j E_j^1 \\
& + \sum_{j \in J} w_j E_j^2 .
\end{aligned}$$

sujeto a

$$E_j^1 - TP_{ijl} A_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.15)$$

$$E_j^2 - TW_{jkl} B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.16)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} = D_k \quad \forall k \in K \quad (4.17)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} \leq MP_i \quad \forall I \in I \quad (4.18)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.19)$$

$$\sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} \leq 1 \quad \forall I \in I, j \in J \quad (4.20)$$

$$\sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} \leq 1 \quad \forall j \in J, k \in K \quad (4.21)$$

$$X_{ijl} - A_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.22)$$

$$Y_{jkl} - B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.23)$$

$$MP_i A_{ijl} - X_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.24)$$

$$MW_j B_{jkl} - Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.25)$$

$$T, E_j^1, E_j^2, X_{ijl}, Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (4.26)$$

$$Z_j, A_{ijl}, B_{jkl} \in \{0,1\} \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (4.27)$$

Con esta relajación, el problema puede ser descompuesto en 3 subproblemas como se indica a continuación, donde denotaremos por $L_1(u, v, w, q)$ al subproblema 1 sujeto a las ecuaciones (4.15), (4.18), (4.20), (4.22) y (4.24), $L_2(u, v, w, q)$ al subproblema 2 y $L_3(u, v, w, q)$ al subproblema 3 sujeto a (4.16), (4.17), (4.19), (4.21), (4.23) y (4.25):

$$\min L(u, v, w, q) = L_1(u, v, w, q) + L_2(u, v, w, q) + L_3(u, v, w, q)$$

La formulación matemática del subproblema 1 es:

$$\min L_1(u, v, w) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} (CP_{ijl} + v_j) X_{ijl} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} q_j A_{ijl} + \sum_{j \in J} w_j E_j^1.$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} E_j^1 - TP_{ijl} A_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \\ \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} &\leq MP_i & \forall I \in I \\ \sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} &\leq 1 & \forall I \in I, j \in J \\ X_{ijl} - A_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \\ MP_i A_{ijl} - X_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \\ E_j^1, X_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \\ A_{ijl} &\in \{0,1\} & \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \end{aligned}$$

Este subproblema considera las variables X_{ijl}, A_{ijl}, E_j^1 en la función objetivo y en las restricciones. Se puede observar que este subproblema es muy parecido al subproblema 1 de la dualización 1 con la única diferencia que se puede descomponer en i subproblemas independientes, uno para cada planta.

El subproblema 2 considera únicamente las variables Z_j y su modelo matemático es el siguiente:

$$\min L_2(u, v, w, q) = \sum_{j \in J} (F_j - u_j MW_j + q_j) Z_j$$

sujeto a:

$$Z_j \in \{0,1\} \quad \forall i \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk}$$

En este caso se puede notar que la variable Z_j está restringida solamente por la restricción de integralidad, lo que indica que se puede obtener el resultado muy fácilmente. La solución está dada por:

$$Z_j = \begin{cases} 0 & \text{si } F_j - u_j MW_j + q_j \geq 0 \\ 1 & \text{si } F_j - u_j MW_j + q_j > 0 \end{cases}, \forall j \in J$$

Por su parte, el subproblema 3 toma en cuenta las variables $T, Y_{jkl}, B_{jkl}, E_j^2$, y queda exactamente igual que el subproblema 2 del dual lagrangiano 1, y en este caso se puede particionar en k problemas independientes, uno para cada cliente. La formulación es la siguiente:

$$\min L_3(u, v, w) = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} (CW_{jkl} + u_j - v_j) Y_{jkl} - \sum_{j \in J} w_j T + \sum_{j \in J} w_j E_j^2.$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} E_j^2 - TW_{jkl} B_{jkl} &\geq 0 & \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \\ \sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} &= D_k & \forall k \in K \\ \sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} &= 1 & \forall k \in K \\ \sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} &\leq 1 & \forall j \in J, k \in K \\ Y_{jkl} - B_{jkl} &\geq 0 & \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \\ MW_j B_{jkl} - Y_{jkl} &\geq 0 & \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \\ T, E_j^2, Y_{jkl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \\ B_{jkl} &\in \{0,1\} & \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \end{aligned}$$

Con el objetivo de descomponer el problema original en subproblemas que tengan la estructura de problemas típicos, específicamente el de asignación generalizada, que permita ser resuelto por algoritmos eficientes, se presenta a continuación la dualización 3.

4.2.3 Dualización 3

Para el dual lagrangiano 3 solo se dualizan las ecuaciones (3.24), (3.30), (3.38), con lo que podrá descomponerse posteriormente en dos subproblemas. La formulación matemática de la dualización 3 es la siguiente:

$$\begin{aligned} \min L(u, v, w) = & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} (CP_{ijl} + v_j) X_{ijl} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} (CW_{jkl} - v_j) Y_{jkl} + \sum_{j \in J} (F_j + w_j) Z_j \\ & - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} w_j A_{ijl} - \sum_{j \in J} u_j T + \sum_{j \in J} u_j E_j^1 + \sum_{j \in J} u_j E_j^2. \end{aligned}$$

sueto a

$$E_j^1 - TP_{ijl} A_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.28)$$

$$E_j^2 - TW_{jkl} B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.29)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} = D_k \quad \forall k \in K \quad (4.30)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} \leq MP_i \quad \forall I \in I \quad (4.31)$$

$$MW_j Z_j - \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (4.32)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} = 1 \quad \forall k \in K \quad (4.33)$$

$$\sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} \leq 1 \quad \forall I \in I, j \in J \quad (4.34)$$

$$\sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} \leq 1 \quad \forall j \in J, k \in K \quad (4.35)$$

$$X_{ijl} - A_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.36)$$

$$Y_{jkl} - B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.37)$$

$$MP_i A_{ijl} - X_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.38)$$

$$MW_j B_{jkl} - Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.39)$$

$$T, E_j^1, E_j^2, X_{ijl}, Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (4.40)$$

$$Z_j, A_{ijl}, B_{jkl} \in \{0,1\} \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (4.41)$$

El problema puede ser descompuesto en 2 subproblemas, donde se denota por $L_1(u, v, w)$ al subproblema 1 sueto a las ecuaciones (4.28), (4.31), (4.34), (4.36) y (4.38). Al subproblema 2 se denota $L_2(u, v, w)$ sueto a las ecuaciones (4.29), (4.30), (4.32), (4.33), (4.35), (4.37) y (4.39). Los subproblemas se muestran a continuación.

Formulación matemática del subproblema 1:

$$\min L_1(u, v, w) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} (CP_{ijl} + v_j) X_{ijl} - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} w_j A_{ijl} + \sum_{j \in J} u_j E_j^1.$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} E_j^1 - TP_{ijl} A_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \\ \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} &\leq MP_i & \forall I \in I \\ \sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} &\leq 1 & \forall I \in I, j \in J \\ X_{ijl} - A_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \\ MP_i A_{ijl} - X_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \\ E_j^1, X_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \\ A_{ijl} &\in \{0,1\} & \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \end{aligned}$$

Como puede verse, en este subproblema se involucran las variables X_{ijl}, A_{ijl}, E_j^1 , en la medida de desempeño y en las restricciones. A demás, se puede particionar en i problemas más pequeños (uno para cada planta), al igual que el subproblema 1 del dual lagrangiano 2.

Formulación matemática del subproblema 2:

$$\min L_2(u, v, w) = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} (CW_{jkl} - v_j) Y_{jkl} + \sum_{j \in J} (F_j + w_j) Z_j - \sum_{j \in J} u_j T + \sum_{j \in J} u_j E_j^2.$$

sujeto a:

$$\begin{aligned} E_j^2 - TW_{jkl} B_{jkl} &\geq 0 & \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \\ \sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} &= D_k & \forall k \in K \\ MW_j Z_j - \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} &\geq 0 & \forall j \in J \\ \sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} &= 1 & \forall k \in K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} &\leq 1 && \forall j \in J, k \in K \\
Y_{jkl} - B_{jkl} &\geq 0 && \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \\
MW_j B_{jkl} - Y_{jkl} &\geq 0 && \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \\
T, E_j^2, Y_{jkl} &\geq 0 && \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \\
B_{jkl} &\in \{0,1\} && \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk}
\end{aligned}$$

En este subproblema se involucran las variables $E_j^2, T, Z_j, B_{jkl}, Y_{jkl}$ y tiene una estructura muy similar al problema de asignación generalizada. Sin embargo, ahora no es posible separarlo en problemas más pequeños debido a la presencia de la restricción (4.32).

Las relajaciones mostradas anteriormente se han desarrollado con el interés de obtener un problema lagrangiano que pueda descomponerse de alguna manera en problemas más pequeños, con la esperanza de que serán más fáciles y rápidos de resolver.

Sin embargo, esto no necesariamente redundará en soluciones de calidad. Recuérdese que se está tratando con un problema bi-objetivo y en todas las dualizaciones mencionadas anteriormente se está relajando la restricción que considera tomar el máximo tiempo de transportación del producto entre las instalaciones. Es decir, la variable T no tiene restricción alguna aparte de que debe tomar valores positivos, por lo que, las soluciones no dominadas de las dualizaciones anteriores tenderán a tener un comportamiento vertical, cuando se grafican considerando el eje x para los valores de f_1 y el eje y para los valores de f_2 .

Es otras palabras, que al utilizar el método ε -R para obtener las soluciones no dominadas, el hecho de pasar f_2 como restricción no tendrá impacto en el resultado que se obtiene al minimizar f_1 e ir variando el parámetro que acota a f_2 .

Teniendo en cuenta esto se desarrollan las siguientes dos dualizaciones que consideran no relajar la ecuación (3.24), con la esperanza de obtener soluciones de mayor calidad con respecto a los dos objetivos.

4.2.4 Dualización 4

La dualización 4 consiste en relajar las restricciones (3.29), (3.30), (3.31), (3.34), (3.35), (3.36), (3.37) e incorporarlas a la función objetivo (3.22). Con esto, el problema lagrangiano tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \min L(u, v, w, q, h, g, s) = & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} (CP_{ijl} + v_j - w_{ij} + h_{ijl}) X_{ijl} \\ & + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} (CW_{jkl} + u_j - v_j - q_{jkl} + g_{jkl}) Y_{jkl} \\ & + \sum_{j \in J} (F_j - u_j MW_j + q_j) Z_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} (w_{ijl} - MP_i h_{ijl}) A_{ijl} \\ & + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} (q_{jkl} - MW_j g_{jkl} + s_k) B_{jkl} - \sum_{k \in K} s_k. \end{aligned}$$

sujeto a

$$T - E_j^1 - E_j^2 \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (4.42)$$

$$E_j^1 - TP_{ijl} A_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.43)$$

$$E_j^2 - TW_{jkl} B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.44)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} = D_k \quad \forall k \in K \quad (4.45)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} \leq MP_i \quad \forall I \in I \quad (4.46)$$

$$\sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} \leq 1 \quad \forall I \in I, j \in J \quad (4.47)$$

$$\sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} \leq 1 \quad \forall j \in J, k \in K \quad (4.48)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} - Z_j \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (4.49)$$

$$T, E_j^1, E_j^2, X_{ijl}, Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (4.50)$$

$$Z_j, A_{ijl}, B_{jkl} \in \{0, 1\} \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (4.51)$$

Este problema se puede separar en 3 subproblemas como sigue:

$$\begin{aligned} \min L(u, v, w, q, h, g, s) = & L_1(u, v, w, q, h, g, s) + L_2(u, v, w, q, h, g, s) \\ & + L_3(u, v, w, q, h, g, s) - \sum_{k \in K} s_k \end{aligned}$$

donde el subproblema 1 está sujeto a la ecuación (4.46), el subproblema 2 a (4.42), (4.43), (4.44), (4.47), (4.48) y (4.49), por ultimo el subproblema 3 está sujeto a la ecuación (4.45).

La formulación matemática del subproblema 1 es:

$$\min L_1(u, v, w, q, h, g, s) = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} (CP_{ijl} + v_j - w_{ij} + h_{ijl}) X_{ijl}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} &\leq MP_i & \forall I \in I \\ X_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \end{aligned}$$

Nótese que en este subproblema solo se involucran las variables X_{ijl} , y solo se considera la restricción de la capacidad de las plantas. Más aun, este subproblema se puede particionar en i problemas independientes, uno para cada cliente.

Formulación matemática del subproblema 2:

$$\begin{aligned} \min L_2(u, v, w, q, h, g, s) &= \sum_{j \in J} (F_j - u_j MW_j + q_j) Z_j + \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} (w_{ijl} - MP_i h_{ijl}) A_{ijl} \\ &+ \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} (q_{jkl} - MW_j g_{jkl} + s_k) B_{jkl}. \end{aligned}$$

sujeto a

$$\begin{aligned} T - E_j^1 - E_j^2 &\geq 0 & \forall j \in J \\ E_j^1 - TP_{ijl} A_{ijl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \\ E_j^2 - TW_{jkl} B_{jkl} &\geq 0 & \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \\ \sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} &\leq 1 & \forall I \in I, j \in J \\ \sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} &\leq 1 & \forall j \in J, k \in K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i \in I} \sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} - Z_j &\geq 0 & \forall j \in J \\
T, E_j^1, E_j^2 &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \\
Z_j, A_{ijl}, B_{jkl} &\in \{0,1\} & \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk}
\end{aligned}$$

En este subproblema se involucran las variables $E_j^1, E_j^2, T, Z_j, A_{ijl}, B_{jkl}$, aquí se toma en cuenta la restricción del tiempo entre instalaciones. Además de ello, este subproblema puede separarse en j problemas independientes, uno para cada almacén.

Formulación matemática del subproblema 3:

$$\min L(u, v, w, q, h, g, s) = \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} (CW_{jkl} + u_j - v_j - q_{jkl} + g_{jkl}) Y_{jkl}.$$

sujeto a:

$$\begin{aligned}
\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} &= D_k & \forall k \in K \\
Y_{jkl} &\geq 0 & \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk}
\end{aligned}$$

En este caso solo quedan las variables Y_{jkl} con únicamente la restricción de satisfacción de las demandas de los clientes. Nótese que este subproblema también puede particionarse en k problemas más pequeños uno para cada cliente.

Es de esperarse que esta dualización entregue soluciones de mayor calidad y que se resuelva en tiempos razonables, dado que su estructura permite la descomposición en subproblemas más pequeños.

Por ultimo se desarrolla la dualización 5 con la misma idea de no relajar ninguna restricción del tiempo, pero relajando las restricciones más comunes que son la capacidad de los almacenes (para tener un problema no capacitado) y la restricción de que los clientes sean abastecidos de un solo almacén.

4.2.5 Dualización 5

Esta dualización consiste en relajar las ecuaciones (3.29), (3.30), (3.38). La formulación matemática del problema lagrangiano es:

$$\begin{aligned} \min L(u, v, w) = & \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} CP_{ijl} X_{ijl} + \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} (CW_{jkl} + u_j) Y_{jkl} + \sum_{j \in J} (F_j - u_j MW_j + w_j) Z_j \\ & - \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} w_j A_{ijl} - \sum_{j \in J} \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} v_k B_{jkl} + \sum_{k \in K} v_k. \end{aligned}$$

sujeto a

$$T - E_j^1 - E_j^2 \geq 0 \quad \forall j \in J \quad (4.52)$$

$$E_j^1 - TP_{ijl} A_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.53)$$

$$E_j^2 - TW_{jkl} B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.54)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} = D_k \quad \forall k \in K \quad (4.55)$$

$$\sum_{j \in J} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} \leq MP_i \quad \forall I \in I \quad (4.56)$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{l \in LP_{ij}} X_{ijl} - \sum_{k \in K} \sum_{l \in LW_{jk}} Y_{jkl} = 0 \quad \forall j \in J \quad (4.57)$$

$$\sum_{l \in LP_{ij}} A_{ijl} \leq 1 \quad \forall I \in I, j \in J \quad (4.58)$$

$$\sum_{l \in LW_{jk}} B_{jkl} \leq 1 \quad \forall j \in J, k \in K \quad (4.59)$$

$$X_{ijl} - A_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.60)$$

$$Y_{jkl} - B_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.61)$$

$$MP_i A_{ijl} - X_{ijl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, l \in LP_{ij} \quad (4.62)$$

$$MW_j B_{jkl} - Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall j \in J, k \in K, l \in LW_{jk} \quad (4.63)$$

$$T, E_j^1, E_j^2, X_{ijl}, Y_{jkl} \geq 0 \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (4.64)$$

$$Z_j, A_{ijl}, B_{jkl} \in \{0, 1\} \quad \forall I \in I, j \in J, k \in K, l \in LP_{ij}, l \in LW_{jk} \quad (4.65)$$

Nótese que la estructura de este problema no permite su descomposición en problemas más pequeños. Además, las variables Z_j solamente están restringidas por la restricción de integralidad, por lo que tomará su valor dependiendo solamente de la medida de desempeño.

4.3 Restricciones redundantes

En la literatura consultada (Tragantalerngsak, Holt y Rönnqvist, 1997) se han encontrado estudios que muestran que muchas veces para obtener soluciones de mayor calidad es útil agregar restricciones que si bien son redundantes al problema original, no lo son para el problema lagrangiano.

En el caso del problema que se aborda en esta tesis, una de tales restricciones redundantes puede ser:

$$\sum_j Z_j \geq 1 \quad (4.66)$$

La cual establece que se abra al menos un almacén. Otra restricción redundante que se puede incluir es la que fuerza a abrir los almacenes suficientes para satisfacer todas las demandas de los clientes, esto es:

$$\sum_j MW_j Z_j \geq \sum_k D_k \quad (4.67)$$

Las restricciones (4.66) y (4.67) se agregan a las 5 dualizaciones propuestas, con la esperanza de obtener cotas de mayor calidad, sin embargo debe notarse que algunas dualizaciones pueden comportarse de manera redundante al igual que para el problema original.

Lo que corresponde ahora es resolver cada una de las dualizaciones propuestas, esto es, obtener los mejores valores entre la infinidad de valores que pueden tomar los multiplicadores de Lagrange. En el siguiente punto se explicará el método utilizado.

4.4. Método de optimización por subgradiente

4.4.1 Fundamentos del método

Antes de describir el método de optimización por subgradiente, es necesario recordar algunos conceptos importantes para su comprensión (Martin, 1999).

El gradiente de un campo escalar que sea diferenciable en el entorno de un punto es un vector que permite hallar la derivada direccional en cualquier dirección. El subgradiente extiende el concepto de un gradiente a funciones convexas/cóncavas no diferenciables. Un vector $\gamma \in R^m$ es un subgradiente de $z(u)$ en un vector \bar{u} si y solo si:

$$z(u) \leq z(\bar{u}) + (u - \bar{u})^T \gamma, \quad \forall u \in R^m.$$

Ahora, si denotamos por $\Gamma(\bar{u})$ el conjunto de soluciones óptimas para la función lagrangiana en \bar{u} , entonces $\bar{u} \in \Gamma(\bar{u})$ si y solo si:

$$z(\bar{u}) = c^T \bar{x} + \bar{u}^T (b - A\bar{x}) = \min \{ b^T \bar{u} + (c - A^T)^T x : x \in \Gamma \}.$$

Con esto, es fácil verificar que si $\bar{u} \in \Gamma(\bar{u})$ entonces el vector $\gamma = (b - A\bar{x})$ es un subgradiente de $z(u)$ en el vector \bar{u} . Ahora estamos en condiciones de describir los pasos del método de optimización por subgradiente.

4.4.2 El método de optimización por subgradiente

Uno de los métodos más conocidos para resolver el dual lagrangiano es el método de optimización por subgradiente. Este es un proceso iterativo en el que en cada paso se mueve en la dirección de un subgradiente. En la Figura 4.2 se muestra el algoritmo del método.

Paso 1: Inicializar los multiplicadores de Lagrange. $u = u_o$.

Paso 2: En cada iteración k :

- Resolver el problema lagrangiano $IP(u^k)$ con solución optima $x(u^k)$.
- Actualizar los multiplicadores de Lagrange en dirección del subgradiente.
 $u^{k+1} = \max\{u^k + t_k(d - Dx(u^k)), 0\}$, donde t_k es un escalar positivo llamado la longitud de paso

Paso 3: Sí $\|u^{k+1} - u^k\| < \varepsilon$ entonces parar el método, Si no,
 $k \leftarrow k + 1$ y regresar al paso 2.

Figura 4.2. Algoritmo del método de optimización por subgradiente

Asumiendo que el problema dual lagrangiano $w_{LD} = \max\{z(u) : u \geq 0\}$ tiene una solución optima \bar{u} , el método nos indica que si se tiene t_k lo suficientemente pequeña, entonces el punto u^{k+1} estará mas cerca a \bar{u} que al punto u^k .

Como puede verse este algoritmo es muy simple. En cada iteración los multiplicadores de Lagrange van cambiando desde el punto actual u^k en dirección al subgradiente, considerando cierta longitud de paso. Lo difícil es precisamente escoger esta longitud de paso t_k para lograr garantizar la convergencia.

El principal resultado teórico afirma que la secuencia $\{z(u^k)\}$ converge a $z(\bar{u})$ si la secuencia $\{t_k\}$ converge a cero y $\sum_{k=0}^{\infty} t_k = \infty$. La razón para esta última condición es hacer las longitudes de paso lo suficientemente grandes para conseguir, a partir de una solución inicial u_o , a una solución óptima \bar{u} .

En la práctica es muy común determinar la longitud de paso mediante la siguiente formula:

$$t_k = \frac{\theta_k [z - z(u^k)]}{\|d - Dx(u^k)\|^2} \quad (4.68)$$

Donde θ_k es un escalar positivo entre 0 y 2. La mayoría de las veces el parámetro θ_k es inicializado en $\theta_0 = 2$ y se va reduciendo siempre y cuando el valor $z(u)$ no haya mejorado durante un número fijo de iteraciones.

Otro punto importante aquí es la dificultad en obtener una cota inferior dual $z \leq w_{LD}$ ya que típicamente es desconocida, como sucede en nuestro caso. Lo más común en la práctica es conocer una buena cota superior y en ese caso se utiliza una cota superior primal \bar{z} en lugar de la cota inferior dual. Sin embargo, si $\bar{z} > w_{LD}$ el término $\bar{z} - z(u^k)$ en el numerador de la expresión (4.68) no tenderá a cero y las sucesiones $\{u^k\}, \{z(u^k)\}$ no convergerán. Si se observa este comportamiento el valor de \bar{z} debe ser decrementado (Wolsey, 1998).

A continuación se describe el algoritmo diseñado para obtener una solución factible al problema con el objetivo de utilizarla como cota superior en el método de optimización por subgradiente.

4.5 Heurística para encontrar una solución factible

La idea es construir una solución factible con “buenos” valores de la función objetivo (3.22), que es la que se está minimizando en el método ε -R al resolver los problemas lagrangianos.

La heurística que se propone consta de tres pasos y en forma resumida procede de la siguiente manera:

1. Inicialmente busca una distribución del flujo en el problema original para cada una de las posibles ubicaciones donde se puede abrir un almacén y guarda la ubicación con la mejor distribución (menor costo).

2. A continuación busca si es posible otra mejor distribución en conjunción con las posibles ubicaciones restantes.
3. Si en algún caso el algoritmo no encuentra ninguna distribución para cada uno de los almacenes, entonces la heurística intenta encontrar una distribución abriendo todos los almacenes.

Es posible que en algún caso no encuentre ninguna distribución. Si esto pasa, encuentra una distribución abriendo los almacenes en todas las ubicaciones potenciales. A continuación se presenta el algoritmo en forma de pseudocódigo.

Paso 0:

Inicializar $S \leftarrow I$, I conjunto de plantas.

$V \leftarrow J$, J conjunto de posibles ubicaciones de los almacenes.

$C \leftarrow K$, K conjunto de clientes o centros de distribución.

$A = S \cup C$

$sum_dem = \sum_{k \in C} D_k$;

$Min_total_costo = 0$;

$Prev_total_costo = 0$;

Paso 1:

Para cada almacén $j \in V$

$A = A \cup \{j\}$

$conjunto_costo = 0$;

$sum_capacidades = 0$;

Calcular la suma de las capacidades de los almacenes considerados en A

$sum_capacidades = \sum_{j \in A} CW_j$;

Verifica que las posibles ubicaciones a abrir satisfagan la demanda de los clientes

si ($sum_capacidades \geq sum_dem$) {
Encontrar una distribución de la cadena de suministro considerando los almacenes en A.

 $conjunto_costo = conjunto_costo + (\text{minimo costo total de la distribución de la cadena de suministro considerando los } j \in A)$

si ($conjunto_costo < Min_total_costo$) {

 $Min_total_costo = conjunto_costo;$
 $Min_almacen = j;$
 }
 $A = A \setminus \{j\}$

 } *falso* {
 $A = A \setminus \{j\}$
regresar al paso 1
 }

Paso2:

Si no se encuentra una distribución para ninguna posible ubicación, tomar el posible almacén con máxima capacidad que se encuentre en V

Si (no encuentra una distribución para ninguna posible ubicación) {
si ($V \neq \emptyset$) {
 $min_almacen = \{ j : \max_{j \in V} \{CW_j\} \}$
 $A = A \cup \{min_almacen\}$
 $V = V \setminus \{min_almacen\}$
ir al paso 1
 } *falso* {
parar
 }
} Falso (si encontró alguna distribución en alguno de las posibles ubicaciones) {

si ($Min_total_costo < Prev_total_costo$) {
 $Prev_total_costo = Min_total_costo;$
 $A = A \cup \{min_almacen\}$
 $V = V \setminus \{min_almacen\}$
si ($V \neq \emptyset$) {

```

        ir al paso 1
      } falso {
        parar
      }
    } falso {
      parar
    }
  }

```

Paso 3:

Si el algoritmo paró y no encontró ninguna distribución, resuelve abriendo todas las posibles ubicaciones.

si ($Prev_total_costo = infinito$)

Prev_total_costo = minimo costo por abrir todas las instalaciones;

En el peor de los casos el algoritmo para encontrar una solución factible ejecuta $|J|^2$ iteraciones, donde en cada iteración se resuelve un problema de programación entera mixta mediante el método de ramificación y acotamiento.

Ya definido el algoritmo que se utiliza para obtener la cota superior que se utiliza en la expresión que calcula la longitud de paso, solo queda decidir cómo se reduce el parámetro θ_k y en qué momento decrementarlo, lo cual se obtiene empíricamente y se comenta en el capítulo siguiente.

CAPÍTULO 5

EXPERIMENTACIÓN COMPUTACIONAL

En este capítulo se describe el estudio computacional realizado para analizar los resultados arrojados por cada una de las relajaciones propuestas. Este estudio se puede separar en dos fases:

- Una primera fase donde se determinan valores de parámetros y otros aspectos importantes que influyen en las respuestas que se obtienen. En esta fase se trabaja con instancias pequeñas para las que se conoce el frente de Pareto óptimo, por lo que el frente obtenido para cada una de las dualizaciones se compara contra él.
- En la segunda fase del estudio se hallarán los conjuntos acotadores para instancias de mayor tamaño utilizando las dualizaciones que mejor desempeño hayan mostrado en los experimentos de la fase anterior.

Se persiguen varios objetivos con los experimentos, los cuales se establecen explícitamente a continuación. Posteriormente se describen las características de las

instancias utilizadas y por último se describen los experimentos realizados y resultados obtenidos.

5.1 Objetivos de los experimentos

1. Determinar el valor adecuado para inicializar los multiplicadores de Lagrange.
2. Determinar cada cuántas iteraciones se debe modificar el parámetro θ_k en el método optimización por subgradiente.
3. Determinar la conveniencia de utilizar restricciones redundantes.
4. Evaluar la calidad de las cotas inferiores entregadas por cada una de las relajaciones.
5. Evaluar el tiempo de cómputo de las diferentes relajaciones para determinar qué relajación resulta más conveniente utilizar para instancias de tamaño más grande.

5.2 Instancias utilizadas

Para la realización del experimento computacional, se consideraron 19 instancias tomadas del trabajo de Olivares-Benítez (2007) que se muestran en la Tabla 5.1. Estas instancias se dividen en dos grupos, las instancias pequeñas (utilizadas en la primera fase del experimento) y las grandes, utilizadas en la segunda fase. Cabe mencionar que para las instancias pequeñas se conoce el frente óptimo de Pareto con una discretización para f_2 de una unidad, es decir, f_2 tiene decrementos de un valor de $\delta = 1$.

El tamaño de las instancias está determinado por los siguientes parámetros:

1. Número de plantas $|I|$.
2. Número de posibles almacenes $|J|$.
3. Número de clientes $|K|$.
4. Número de arcos (canales de transportación) entre los nodos $|LP_{ij}|$ y $|LW_{jk}|$.

Para la generación de las instancias Olivares-Benítez utilizó la configuración $|I| \leq |J| \leq |K|$. Estos parámetros toman valores de 5, 20 ó 50. El número de arcos se tomó como $Narcs = |LP_{ij}| = |LW_{jk}|$, $\forall i \in I, j \in J, k \in K$, con valores de 2 ó 5.

Instancias pequeñas				
Instancia	Plantas	Almacenes	Centros de distribución	Servicios
3_3_4_2_001	3	3	4	2
5_5_5_2_001	5	5	5	2
5_5_5_2_002	5	5	5	2
5_5_5_2_003	5	5	5	2
5_5_5_5_001	5	5	5	5
5_5_5_5_002	5	5	5	5
5_5_5_5_003	5	5	5	5
5_5_20_2_001	5	5	20	2
5_5_20_2_002	5	5	20	2
5_5_20_2_003	5	5	20	2
Instancias grandes				
5_20_20_2_001	5	20	20	2
5_20_20_2_002	5	20	20	2
5_20_20_2_003	5	20	20	2
20_20_20_5_001	20	20	20	5
20_20_20_5_002	20	20	20	5
20_20_20_5_003	20	20	20	5
50_50_50_2_001	50	50	50	2
50_50_50_2_002	50	50	50	2
50_50_50_2_003	50	50	50	2

Tabla 5.1. Estructura de instancias pequeñas y grandes.

El tamaño de las instancias se muestra en la Tabla 5.1 y el código para cada instancia es $|I| - |J| - |K| - Narcs - \text{numero de instancia}$, donde el número de la instancia es un número de orden dentro de cada tamaño. Por ejemplo, la instancia 5-5-5-2-001 se refiere

a la instancia 1 con 5 plantas, 5 almacenes, 5 centros de distribuciones o clientes y 2 arcos entre las instalaciones.

Para cada instancia Olivares-Benítez generó aleatoriamente los siguientes parámetros:

- Demanda de cada cliente
- Capacidad de los almacenes
- Capacidad de las plantas
- Costos de transportación entre instalaciones
- Tiempo de transportación entre instalaciones
- Costo fijo de los almacenes.

Varias instancias fueron generadas para cada tamaño como se describió en la Tabla 5.1, utilizando números específicos de semillas para el generador de números aleatorios. Más detalles pueden verse en Olivares-Benítez (2007).

Todas las instancias de prueba consideradas en este estudio fueron resueltas en CPLEX 9.0 mediante el modelador algebraico GAMS. Mayor información puede ser encontrada en McCarl (2006).

5.3 Rangos para las medidas de desempeño

Anteriormente se mencionó que se utiliza el método ε -R para obtener las soluciones no dominadas. Recordando el funcionamiento del método, que consiste en minimizar solo una función objetivo (en este caso la ecuación (3.22)) y pasar como restricción la otra función objetivo (en nuestro caso la ecuación (3.23)), acotada por un cierto parámetro ε , el aspecto a evaluar ahora es el de cómo obtener los valores que acoten la función objetivo que pasa como restricción.

La manera más sencilla para obtener el rango de valores donde puede variar ε es minimizar por separado cada una de las funciones objetivo ignorando por completo la otra medida de desempeño. Esto es, si se minimiza f_1 (3.22) sujeto a las restricciones (3.24)-(3.40), sin considerar la ecuación (3.23), se puede encontrar el menor valor posible para f_1 y evaluando f_2 con los valores obtenidos para las variables se obtiene una cota superior para f_2 . Ahora, si se repite el mismo procedimiento para f_2 , se obtiene el menor valor posible de f_2 , por lo tanto se obtiene una cota inferior para f_2 . De esta manera ya podemos definir el rango en que varia la cota que se impone a f_2 cuando se use como restricción. Una desventaja de este procedimiento es que como se mencionó en el Capítulo 3 el problema bajo estudio es clasificado como NP-duro, y resolverlo para 2 objetivos por separado, significa resolver 2 problemas NP-duro.

Lo siguiente a definir es la forma de discretizar el dominio del rango de ε , es decir, en cuántas unidades se incrementa o decrementa. Esto se explica en el siguiente apartado. A continuación se presenta en la Tabla 5.2 un ejemplo de cómo obtener los rangos para el parámetro ε en la instancia de tamaño 5_5_5_2_001. El rango de variación de ε es en este caso [12,47].

5_5_5_2_001	Minimizando f_1	Minimizando f_2
f_1	245978.74	763998.00
f_2	47	12

Tabla 5.2. Rango de variación para f_1 y f_2 .

5.4 Fase I del experimento computacional

5.4.1 Ajuste de parámetros del algoritmo subgradiente

En el capítulo anterior se mencionó que para asegurar la convergencia del método de optimización por subgradiente es muy importante decidir:

- qué valores iniciales toman los multiplicadores de Lagrange para reducir el tiempo requerido para la convergencia
- cómo y cada cuando se actualiza el parámetro θ_k utilizado para calcular la longitud de paso en la actualización de los multiplicadores de Lagrange (fórmula (4.68)).

5.4.1.1 Inicialización de los multiplicadores de Lagrange

Se proponen dos formas:

- a) Darle el valor inicial de cero a todos los multiplicadores de Lagrange. Esta es una de las formas más sencillas y utilizadas en la práctica.
- b) Asignar como valor inicial de los multiplicadores los valores duales que arroja la relajación lineal del problema original, esto es, tomar los valores marginales y asignarlos a los multiplicadores de Lagrange. Con esta forma se espera una convergencia más rápida, sin embargo se requiere de un tiempo extra puesto que implica resolver la relajación lineal del problema.

5.4.1.2 Decremento del parámetro θ_k

En la mayoría de las aplicaciones reportadas este parámetro se inicializa en el valor de 2 y a partir de allí, se va reduciendo a la mitad (Guignard y Rosenwein, 1989), esto es:

$$\theta_{k+p} = \frac{\theta_k}{2}, \quad (5.1)$$

Donde p es el número de iteraciones en que se mantiene el parámetro sin variar. Sin embargo, determinar el valor adecuado para p es todo un reto ya que depende de la aplicación específica.

En este trabajo se probaron inicialmente tres valores para p : 3, 5 y 10. A partir de los resultados obtenidos, se tomaron dos valores posibles para p en las pruebas posteriores: $p=10$ y 20. El valor de θ_k se decrementa según la fórmula (5.1).

5.4.1.3 Resultado del experimento

Para esta parte del estudio computacional, esto es, para el ajuste de los parámetros del método de optimización por subgradiente, se utilizan dos de las instancias clasificadas como pequeñas: 3_3_4_2_001 y 5_5_20_2_001.

En cada instancia se comparan los valores obtenidos por cada una de las dualizaciones propuestas en tres puntos diferentes de los valores de f_2 ($f_2=17$, $f_2=11$, $f_2=6$ en la primera instancia y $f_2=50$, $f_2=35$, $f_2=20$ en la segunda instancia), variando los parámetros según se explicó arriba.

Las Tablas 5.3 a la 5.9 se refieren a la instancia 3_3_4_2_001 y las Tablas 5.10 a la 5.12 se refieren a la instancia 5_5_20_2_001.

En la Tabla 5.3 se muestran los valores que entrega la relajación lineal y el modelo entero mixto minimizando f_1 y considerando solo tres valores del parámetro ε cuando se pone como restricción el objetivo f_2 relativo al tiempo. Se observa claramente la conflictividad de los objetivos f_1 y f_2 .

3_3_4_2	f_1		
	$f_2 \leq 17$	$f_2 \leq 11$	$f_2 \leq 6$
MIP	516926.00	676160.00	842722.00
RL	492081.88	492084.62	530231.39

Tabla 5.3. Valor de f_1 para tres valores de ε del MIP y RL.

La Tabla 5.4 presenta los resultados de todas las relajaciones para diferentes valores del parámetro p inicializando los multiplicadores en cero y en los valores duales respectivamente, para el valor de $\varepsilon = 17$ en el método ε -R.

	f_1					$f_2 \leq \varepsilon$
<u>3 3 4 2</u>	D1	D2	D3	D4	D5	
$u_0=0$						
$p = 3$	490990.54	491030.58	469054.41	491925.94	481775.01	17
$p = 5$	492081.89	492081.89	496111.22	491332.36	492081.83	17
$p = 10$	492081.89	492081.89	516706.82	491885.02	492081.88	17
u_0 =valores duales						
$p = 3$	483827.50	480961.13	468934.84	489845.44	455931.78	17
$p = 5$	481383.91	481893.40	499918.90	490455.55	448445.62	17
$p = 10$	492081.89	492081.89	516925.88	491429.39	492081.88	17

Tabla 5.4. Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 17$.

Observaciones:

- Cuando ε toma el valor de 17, se puede observar que para $p = 3$, ninguna de las dualizaciones alcanza el valor de la relajación lineal en el número de iteraciones establecido (1000), tanto para $u_0 = 0$ como en $u_0 = \text{dual}$. Esto es debido a que el valor de θ_k tiende a cero muy rápido, ya que se reduce cada tres iteraciones consecutivas donde no haya ninguna mejoría en el valor del dual lagrangiano.
- Ahora, si se observa para $p = 5$ en el mismo punto para f_2 , con $u_0 = 0$, las dualizaciones D1, D2, D5 alcanzan la relajación lineal mas no son mejor que ella, D3 arroja un valor mejor que RL y D4 no alcanza el valor de la RL en el número fijado de iteraciones.
- Para $u_0 = \text{dual}$, las D1, D2, D4y D5 no llegan a la RL, mientras que D3 es mucho mejor que ella.

- Ahora, si se compara para $p = 10$, con $u_0 = 0$, se nota que D1, D2 y D5 llegan al valor de la relajación lineal, D3 es mucho mejor que ella y D4 no alcanza la RL. Para $u_0 = \text{duales}$ las D1, D2 y D5 llegan a la relajación lineal, la D3 es mucho mejor, incluso está muy cerca al MIP y D4 no llega al valor de la relajación lineal. Como se puede observar tiene un comportamiento similar cuando se toma $u_0 = 0$.
- Una observación importante es cuando $u_0 = 0$, para $p = 5$ y $p = 10$, los resultados son muy similares para las dualizaciones D1, D2 y D5.
- Tomando $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$, con $p = 10$, en ambos casos los valores son muy similares para D1, D2 y D5.

Conclusión preliminar:

- Lo anterior indica que con valores pequeños de p para cambiar el parámetro θ_k , el algoritmo del subgradiente no converge al valor de la relajación lineal lo cual sugiere la conveniencia de aumentar el valor de p . Además, las dualizaciones D1, D2, D5 convergen a la relajación lineal para ambos valores iniciales de los multiplicadores de Lagrange y utilizando cero como valor inicial de los multiplicadores de Lagrange el algoritmo converge a mejores resultados que utilizando la otra manera para las dualizaciones D1, D2, D4 y D5.

En las Figuras 5.1-5.3 se muestra el valor que toma el dual lagrangiano para p : 3, 5 y 10 respectivamente, en 100 iteraciones para la dualización 1 en el valor de $\varepsilon = 17$. En este caso se observa que la convergencia es más rápida al inicializar los multiplicadores de Lagrange con los valores duales de RL. En el Apéndice A se presenta el comportamiento de la convergencia de D2, D3, D4 y D5 en tres puntos de ε .

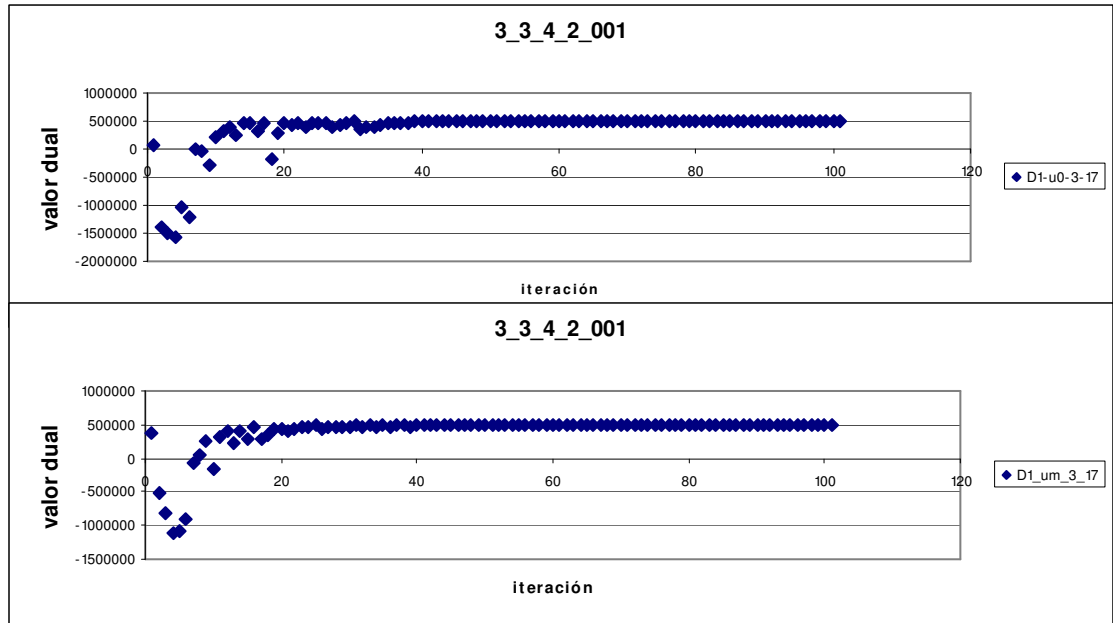


Figura 5.1. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 17.

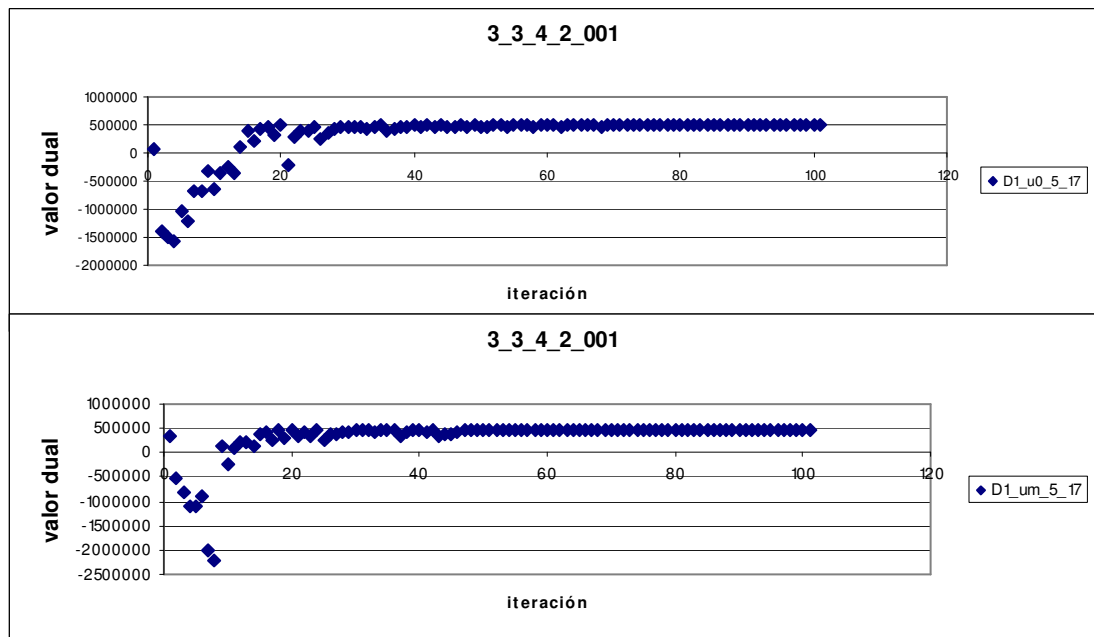


Figura 5.2. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 17.

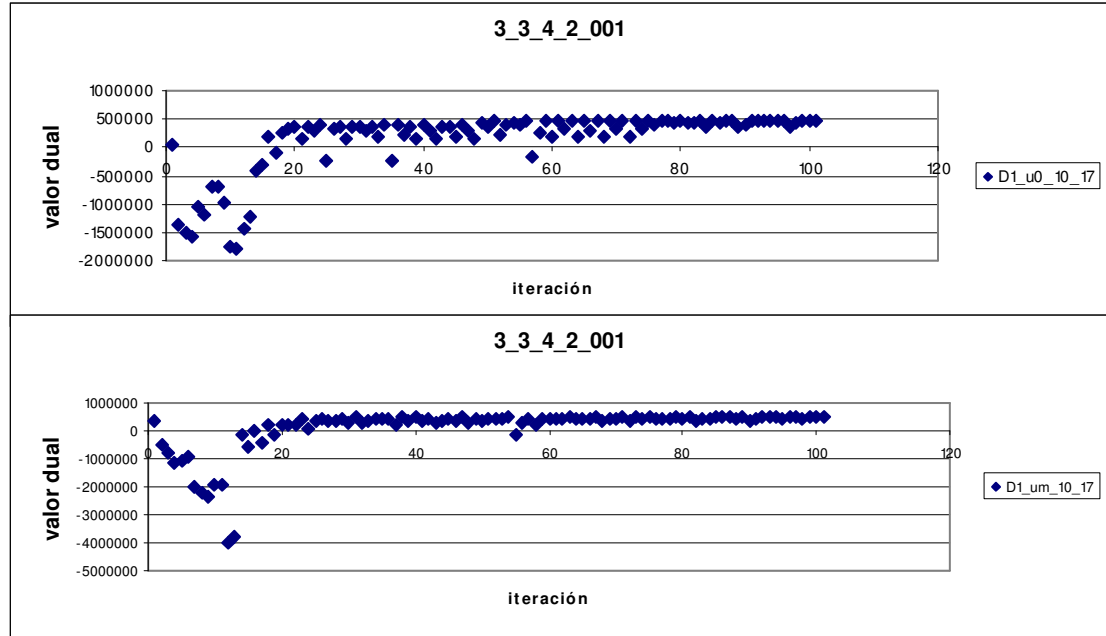


Figura 5.3. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 17.

La Tabla 5.5 presenta los resultados del tiempo de ejecución de todas las dualizaciones para diferentes valores del parámetro p inicializando los multiplicadores en cero y en los valores duales respectivamente, para el valor de $\varepsilon = 17$. Considerando que los subproblemas independientes se pueden resolver simultáneamente, se toma el tiempo consumido por el subproblema que tarda más en concluir. Se observa que para ambas formas de inicializar los multiplicadores de Lagrange la D3 y D5 reportan mayor tiempo de ejecución y los tiempos obtenidos son muy similares.

	Tiempo de ejecución promedio (seg) en 1000 iteraciones					
3_3_4_2	D1	D2	D3	D4	D5	$f_2 \leq \varepsilon$
$u_0 = 0$						
$p = 3$	0.010	0.011	0.015	0.008	0.015	17
$p = 5$	0.009	0.010	0.016	0.008	0.014	17
$p = 10$	0.011	0.011	0.015	0.009	0.015	17
$u_0 = \text{valores duales}$						
$p = 3$	0.011	0.010	0.015	0.008	0.013	17
$p = 5$	0.011	0.010	0.015	0.008	0.013	17
$p = 10$	0.011	0.010	0.016	0.009	0.015	17

Tabla 5.5. Tiempo de ejecución para las 5 dualizaciones en el punto 17.

La Tabla 5.6 presenta los resultados de todas las relajaciones para diferentes valores del parámetro p inicializando los multiplicadores en cero y en los valores duales respectivamente, para otro punto en f_2 es decir $\varepsilon = 11$.

	f_1					
3_3_4_2	D1	D2	D3	D4	D5	$f_2 \leq \varepsilon$
$u_0 = 0$						
$p = 3$	486966.41	486965.51	139108.33	527726.34	605059.75	11
$p = 5$	492082.12	492082.01	487620.43	536949.71	649165.99	11
$p = 10$	492082.66	492082.16	515561.91	537501.74	649777.88	11
$u_0 = \text{valores duales}$						
$p = 3$	482556.30	475822.47	310805.83	536528.30	625964.93	11
$p = 5$	482361.55	483628.54	312107.20	537373.63	640114.69	11
$p = 10$	492082.5	490992.82	516931.09	537951.20	649777.88	11

Tabla 5.6. Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 11$.

Observaciones:

- En este caso, se puede ver que se tienen resultados similares, ya que si comparamos el valor objetivo de la relajación lineal en este punto el cual es 492084.62, con los resultados para $p = 3$, tanto para $u_0 = 0$ como $u_0 = \text{duals}$, las D1, D2, D3 no alcanzan el valor de la relajación lineal, pero las D4 y D5 son mejores que ella.
- Ahora, para $p = 5$ con $u_0 = 0$, pasa algo similar a lo anterior. Las dualizaciones D1 y D2, se acercan al valor de la RL, pero no llegan a él. D3 arroja un valor peor que la RL y los resultados obtenidos con D4 y D5 son mejores que la RL, incluso cuando $p = 3$.
- Los resultados para $u_0 = \text{duals}$ son que D1, D2, D3 no alcanzan el valor de la relajación lineal, pero D4 y D5 son mejores que ella y arrojan mejores resultados que cuando $p = 3$.

- Para $p = 10$ y ambos valores iniciales de los multiplicadores de Lagrange, los resultados indican que D1 y D2 convergen al valor de la RL y D3, D4 y D5 tienen valores mejores a RL.
- Otra observación importante es cuando $u_0 = 0$, para $p = 5$ y $p = 10$, los resultados son muy parecidos para las dualizaciones D1, D2 y D5.
- Tomando $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$, con $p = 10$, en ambos casos los valores son muy parecidos para D1, D2 y D5.

Conclusiones preliminares:

Al igual que para $\varepsilon = 17$, se observa que con valores pequeños de p para cambiar el parámetro θ_k , el algoritmo de optimización por subgradiente no converge al valor de la relajación lineal, lo cual sugiere la conveniencia de aumentar el valor de p . No obstante, en este caso se observó que las dualizaciones D1 y D2 se acercan al valor de RL, pero no llegan a ella.

Este comportamiento era de esperarse, ya que como se comentó en el Capítulo 3 D1, D2 y D6 relajan las restricciones del tiempo, por lo que el valor del dual lagrangiano al reducir f_2 tiene un comportamiento vertical, es decir que en estas dualizaciones el valor de f_1 no se incrementa notoriamente a medida que f_2 se decrementa.

Se puede observar que en las dos formas de inicializar los multiplicadores de Lagrange, con un valor mayor de p , los valores del dual lagrangiano convergen a un valor muy similar.

En las Figuras 5.4 a 5.6 se muestra el valor que toma el dual lagrangiano para p : 3, 5 y 10 en 100 iteraciones para la dualización 1 en el valor de $\varepsilon = 17$. En este caso se observa que la convergencia es más rápida al inicializar los multiplicadores de Lagrange con 0 para todos los valores que p .

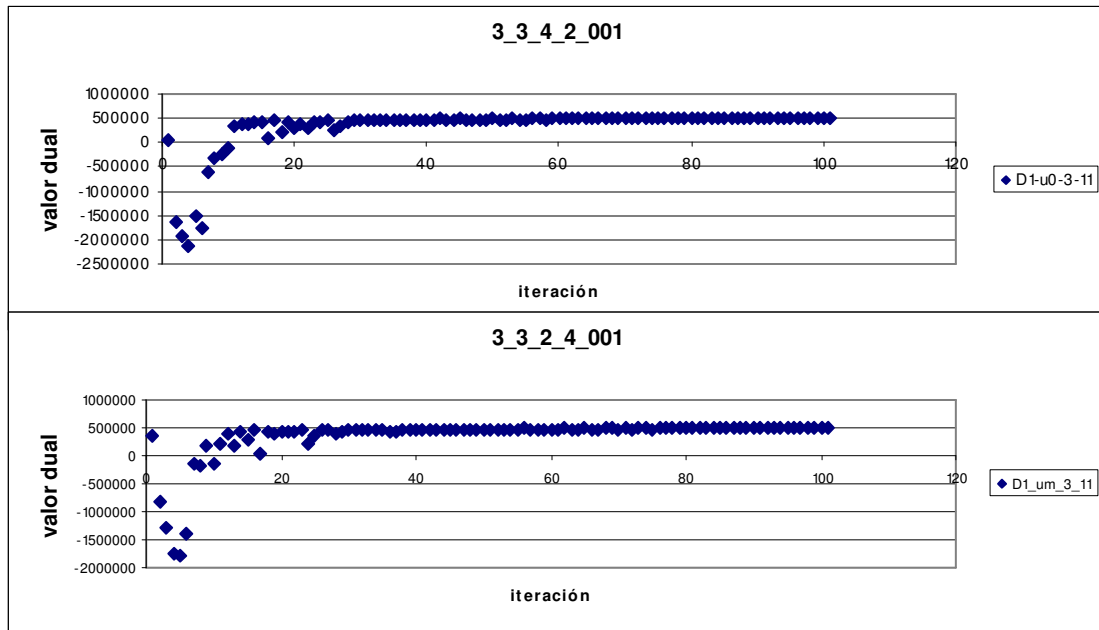


Figura 5.4. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 11.

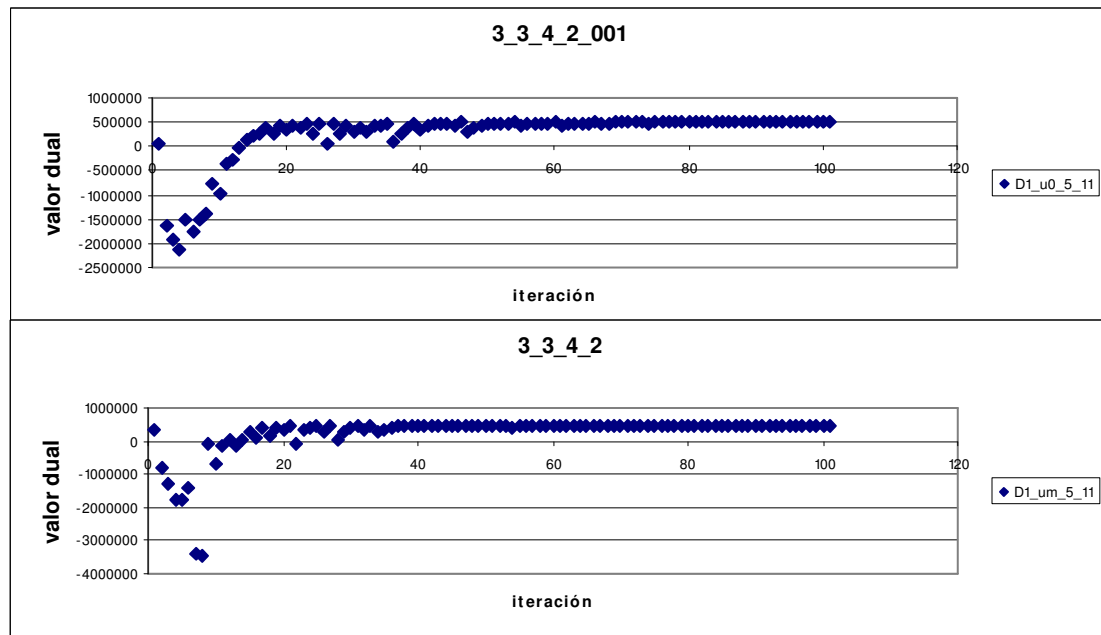


Figura 5.5. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 11.

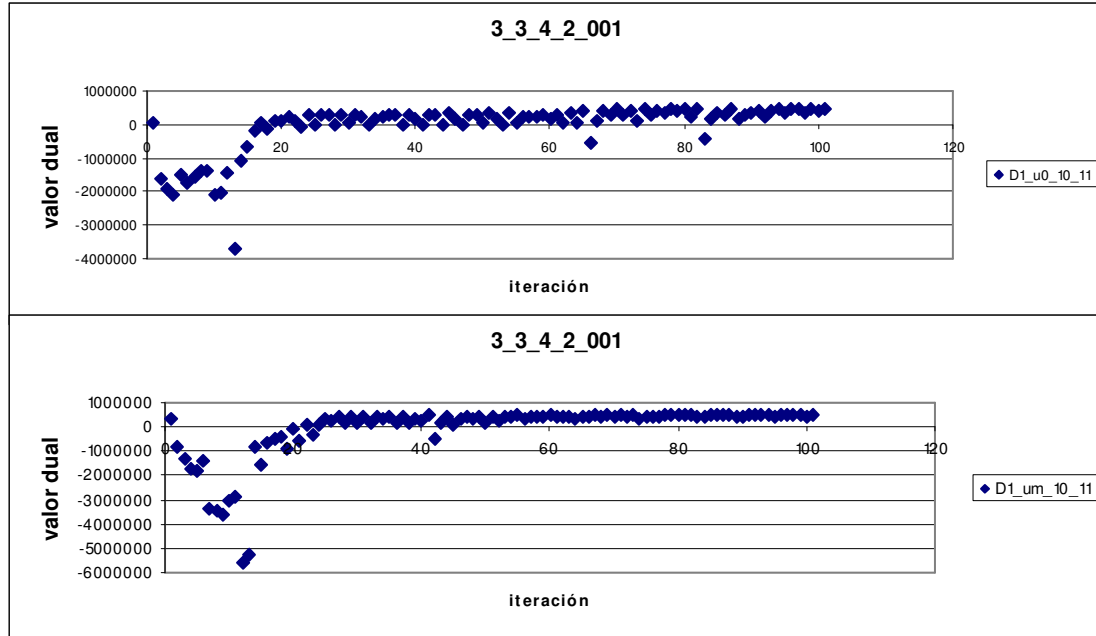


Figura 5.6. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 11.

La Tabla 5.7 presenta los resultados del tiempo de ejecución de todas las dualizaciones para diferentes valores del parámetro p inicializando los multiplicadores en cero y en los valores duales respectivamente, para el valor de $\varepsilon = 11$. Se observa que para ambas formas de inicialización D5 reporta mayor tiempo de ejecución. Además, entre ambas inicializaciones la diferencia del tiempo no es muy notoria en cada una de las dualizaciones.

		Tiempo de ejecución promedio en 1000 iteraciones				
3_3_4_2	D1	D2	D3	D4	D5	$f_2 \leq \varepsilon$
$u_0 = 0$						
$p = 3$	0.011	0.011	0.018	0.015	0.081	11
$p = 5$	0.010	0.010	0.015	0.017	0.077	11
$p = 10$	0.011	0.010	0.016	0.016	0.071	11
$u_0 = \text{valores duales}$						
$p = 3$	0.011	0.011	0.018	0.018	0.075	11
$p = 5$	0.012	0.011	0.017	0.017	0.086	11
$p = 10$	0.011	0.010	0.015	0.016	0.068	11

Tabla 5.7. Tiempo de ejecución para las 5 dualizaciones en el punto 11.

La Tabla 5.8 presenta los resultados de todas las relajaciones para diferentes valores del parámetro p inicializando los multiplicadores en cero y en los valores duales respectivamente, para otro punto en f_2 es decir $\varepsilon = 6$.

	f_1					
3 3 4 2	D1	D2	D3	D4	D5	$f_2 \leq \varepsilon$
$u_0 = 0$						
$p = 3$	485116.27	485119.69	408229.15	745513.11	820930.19	6
$p = 5$	492083.77	492082.70	393482.23	744591.65	824893.81	6
$p = 10$	492087.77	492084.09	488840.88	745770.33	824917.16	6
$u_0 = \text{valores duales}$						
$p = 3$	478379.02	478046.57	117311.96	745817.32	824171.62	6
$p = 5$	486093.20	483352.83	467614.72	745441.79	819936.38	6
$p = 10$	492089.53	492084.76	488697.01	746931.02	824903.26	6

Tabla 5.8 Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 6$.

Observaciones:

- En este caso, para el valor más pequeño que puede tomar f_2 , el valor de la relajación lineal en este punto es 530231.39. Para $p = 3$, tanto para $u_0 = 0$ como $u_0 = \text{dual}$, D1, D2, D3 no alcanzan el valor de la relajación lineal en el número de iteraciones fijado, pero D4 y D5 son mejores que ella.
- Para $p = 5$ con $u_0 = 0$, pasa algo similar a lo anterior, tanto para $u_0 = 0$ como $u_0 = \text{dual}$, D1, D2, D3 no alcanzan el valor de la relajación lineal, pero los valores son mejores que cuando $p = 3$. Las dualizaciones D4 y D5 obtienen valores mejores que la relajación lineal.
- Para $p = 10$ y ambos valores iniciales de los multiplicadores de Lagrange, los resultados indican que D1, D2 y D3 tampoco convergen al valor de la RL, mientras que D4 y D5 obtienen valores mejores a ella.

- Tomando $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$, con $p = 10$, en ambos casos los valores son muy parecidos para D1, D2 y D5.

Conclusión preliminar:

En este punto es más notoria la observación hecha en el punto $f_2=11$ en relación al comportamiento vertical. Las dualizaciones D1, D2, D3 no alcanzan el valor de la relajación lineal debido a que estas dualizaciones relajan las ecuaciones del tiempo, por lo tanto el valor de f_1 no se incrementa notoriamente a medida que el objetivo del tiempo (f_2) se decrementa. Además, considerando ambas formas de inicializar los multiplicadores de Lagrange para el valor $p = 10$, los valores son muy similares para las dualizaciones D1, D2, D3 y D5. Por ello se puede concluir que es más conveniente utilizar $u_0 = 0$ como valor inicial ya que no se tiene que resolver la relajación lineal y además ambas formas convergen a un valor muy cercano.

En las Figuras 5.7 a 5.9 se muestra el valor que toma el dual lagrangiano para p : 3, 5 y 10 en 100 iteraciones para la dualización 1 en el valor de $\varepsilon = 6$. Se observa que la convergencia es más rápida al inicializar los multiplicadores de Lagrange con 0 para todos los valores que p .

La Tabla 5.9 muestra los resultados del tiempo de ejecución de todas las dualizaciones para diferentes valores del parámetro p inicializando los multiplicadores en cero y en los valores duales respectivamente, para el valor de $\varepsilon = 6$. Se observa que para ambas formas de inicialización D5 reporta mayor tiempo de ejecución. Además, entre ambas inicializaciones la diferencia del tiempo no es muy notoria en cada una de las dualizaciones.

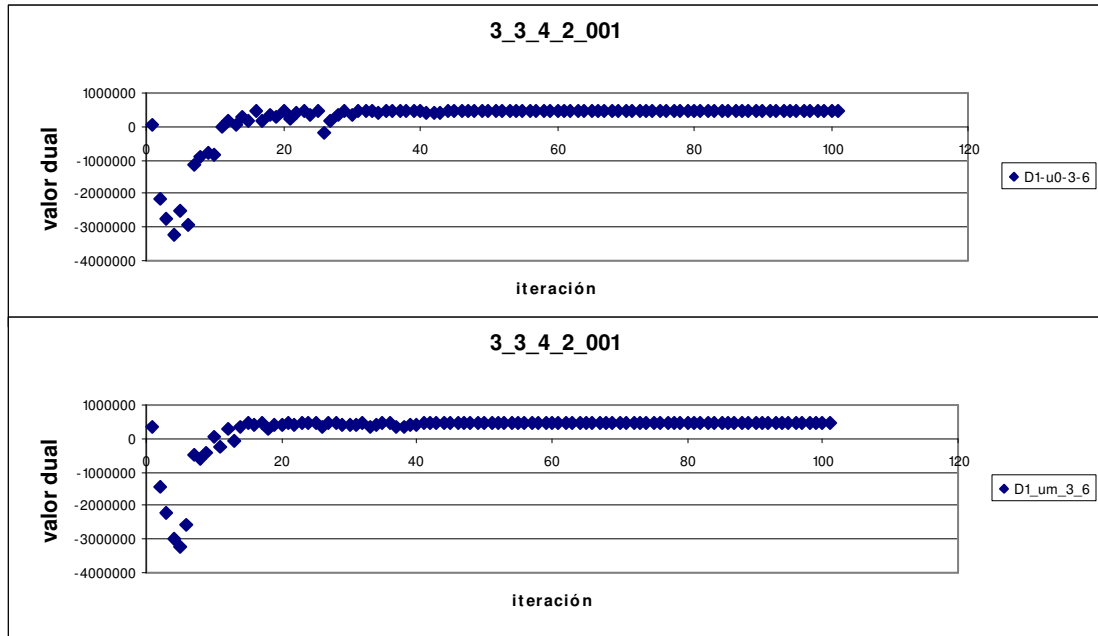


Figura 5.7. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ con $p = 3$ en el punto 6.

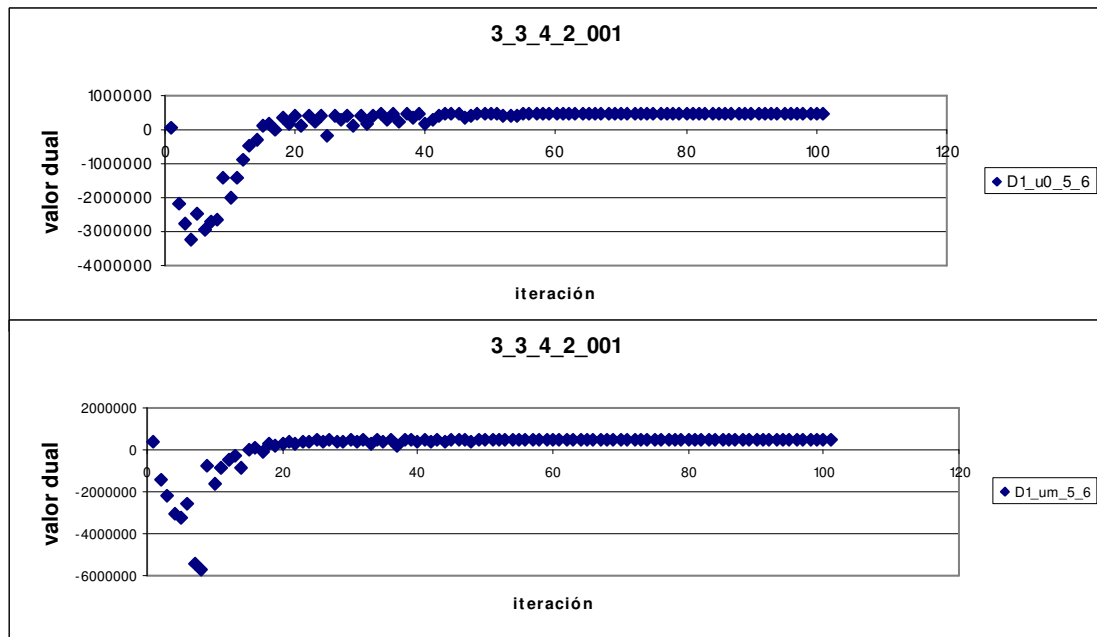


Figura 5.8. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ con $p = 5$ en el punto 6.

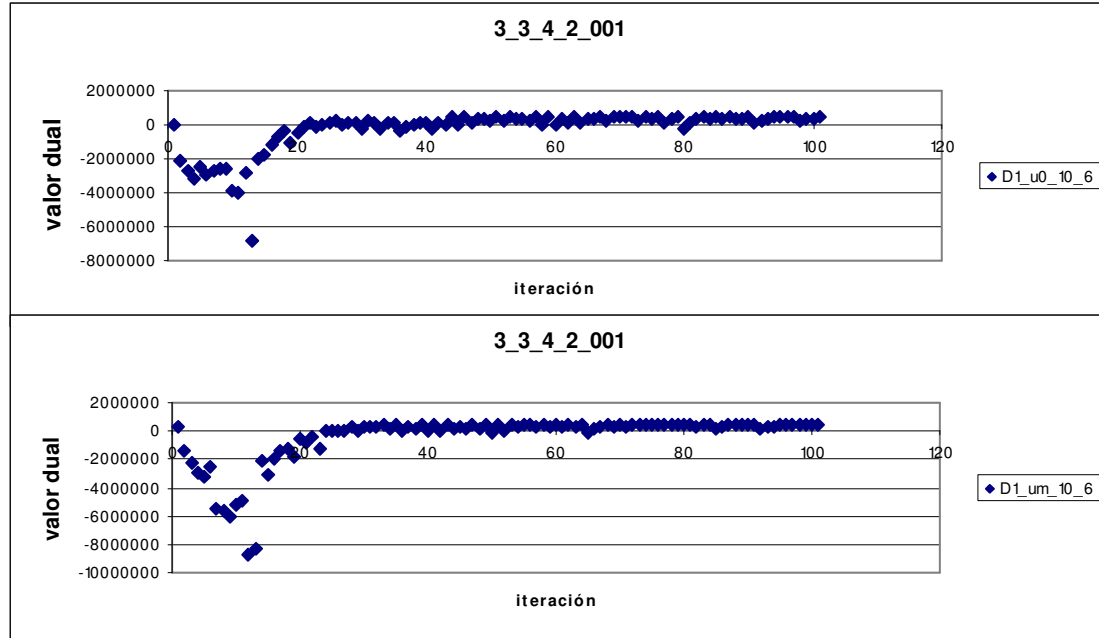


Figura 5.9. Convergencia de D1 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 6.

	Tiempo de ejecución promedio en 1000 iteraciones					$f_2 \leq \varepsilon$
3_3_4_2	D1	D2	D3	D4	D5	
$u_0 = 0$						
$p = 3$	0.011	0.010	0.018	0.012	0.031	6
$p = 5$	0.011	0.010	0.016	0.013	0.035	6
$p = 10$	0.011	0.011	0.020	0.015	0.034	6
u_0 =valores duales						
$p = 3$	0.011	0.010	0.021	0.012	0.033	6
$p = 5$	0.011	0.010	0.019	0.015	0.041	6
$p = 10$	0.011	0.011	0.021	0.015	0.031	6

Tabla 5.9. Tiempo de ejecución para las 5 dualizaciones en el punto 6.

Conclusión general:

- Hasta el momento en las conclusiones de los tres puntos tomados para f_2 , se observa que considerando valores pequeños de p para cambiar el parámetro θ_k , el algoritmo optimización por subgradiente no converge al valor de la relajación lineal lo cual sugiere la conveniencia de aumentar el valor de p . A partir de las observaciones obtenidas para las dualizaciones D1, D2, y D5 se puede tomar un valor de $p = 10$. Para D4 y D5 se observa que para ambos valores iniciales de

los multiplicadores de Lagrange al aumentar p se puede obtener un mejor valor en el dual lagrangiano. Por lo tanto se sugiere dar un mayor valor a p para que el algoritmo de optimización por subgradiente converja en estas dos últimas dualizaciones.

- En esta instancia, en la mayoría de los experimentos para ajustar el valor de los parámetros, se obtienen mejores resultados al inicializar en cero los multiplicadores de Lagrange que cuando se inicializan con los valores de las variables duales. Cuando esto no sucede, la diferencia no es significativa. Además la convergencia de los valores del dual lagrangiano para D1, en dos valores asignados a ε , resulta que la convergencia es más rápida si se inicializan los multiplicadores de Lagrange con cero. Esto último también se observa en Apéndice A para la mayoría de los valores que toma ε en D2, D3, D4 y D5.
- D5 es la dualización que consume más tiempo de ejecución para los tres puntos considerados para f_2 . Además, los tiempos son muy similares en todas las dualizaciones con las dos formas de inicializar los multiplicadores de Lagrange. Cabe mencionar que para la inicialización mediante los valores duales no se ha considerado el tiempo requerido para obtener la relajación lineal.

Teniendo en cuenta las observaciones y conclusiones anteriores, para la siguiente instancia se experimenta con valores de $p = 10$ para las dualizaciones D1, D2 y D5 y $p = 20$ para las dualizaciones D3 y D4. Esta instancia, aunque está catalogada como pequeña, es más grande que la anterior.

Las Tablas 5.10 a la 5.12 corresponden a la instancia 5_5_20_2_001 (5 plantas, 5 almacenes, 20 centros de distribución, y 2 diferentes tipos de servicios). Primeramente aparecen los resultados del MIP y de RL minimizando f_1 para tres valores del parámetro ε en el segundo objetivo en el método del ε -R. Nótese que RL se deteriora cuando ε se decrece.

	f_1		
5 5 20 2	$f_2 \leq 50$	$f_2 \leq 35$	$f_2 \leq 20$
MIP	1803728.67	2044165.84	3234175.30
RL	1730516.06	1730516.81	1730584.89

Tabla 5.10. Valor de f_1 para tres valores de ε del MIP y RL.

Los resultados de las diferentes dualizaciones cuando $\varepsilon = 50$, considerando los dos tipos de inicialización para los multiplicadores y con valores de $p = 10$ y $p = 20$, se muestran en la Tabla 5.11.

	$p = 10$			$p = 20$		
5 5 20 2	D1	D2	D5	D3	D4	$f_2 \leq \varepsilon$
$u_0 = 0$	1730516.04	1730516.04	1730516.06	1792616.42	1730516.06	50
$u_0 = \text{duales}$	1730515.99	1730514.69	1730516.06	1787828.19	1730516.06	50

Tabla 5.11. Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 50$.

Observaciones:

- El valor de la relajación lineal en este punto es: 1730516.06. En este caso se puede notar que con $u_0 = 0$, las dualizaciones D1, D2, D4 y D5 convergen a RL y D3 termina con un valor mejor a la relajación lineal en el número de iteraciones consideradas.
- Los valores obtenidos por las dualizaciones D1, D2, D4 y D5 son muy similares y convergen a la relajación lineal. Sin embargo, con D3 los resultados son mejores.

En las Figuras 5.10 y 5.11 se muestra el valor que toma el dual lagrangiano para p : 10 y 20 en 100 iteraciones en el valor de $\varepsilon = 50$ para la dualización 1 y la dualización 4, respectivamente. En este caso se observa que la convergencia es más rápida al inicializar los multiplicadores de Lagrange con los valores duales de RL para D1 y la convergencia es más rápida para D4 si se inicializan los multiplicadores de Lagrange con 0. En el

Apéndice A aparecen las figuras que describen la convergencia para las dualizaciones 2,3 y 5 de la instancia 5_5_20_001.

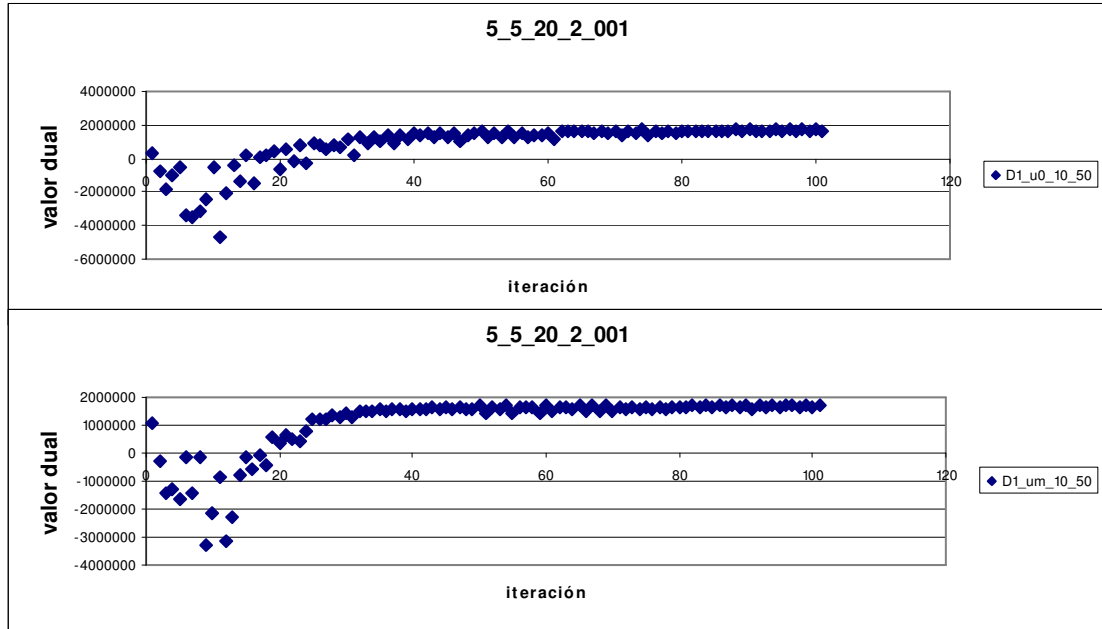


Figura 5.10. Valores de f_1 de $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ para $p = 10$ en el punto 50.

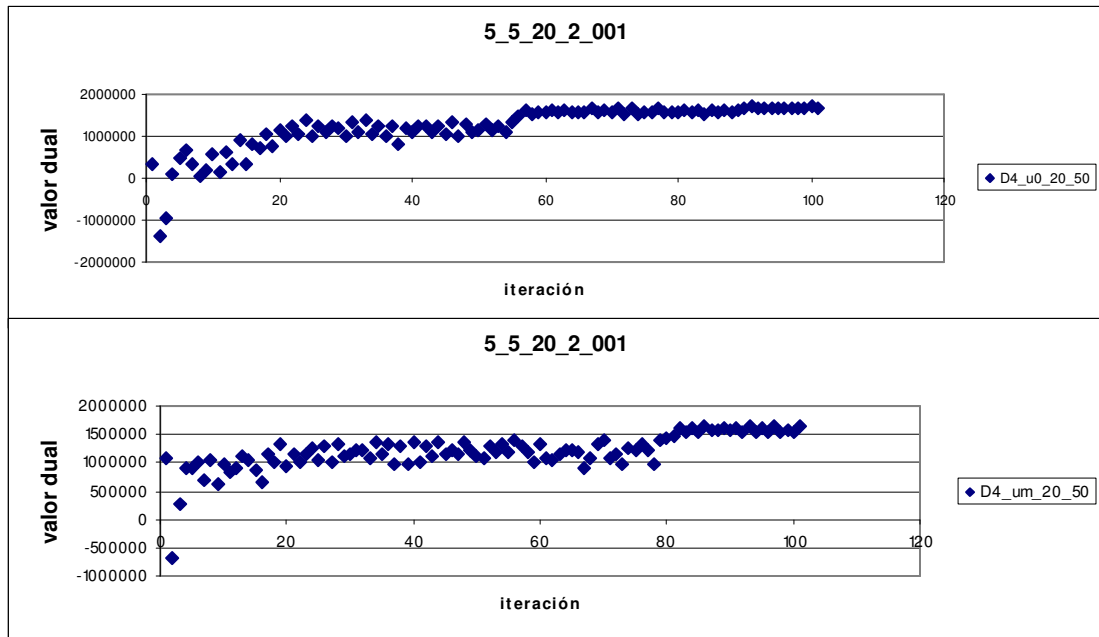


Figura 5.11. Valores de f_1 de $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ para $p = 20$ en el punto 50.

En la Tabla 5.12 se muestra el tiempo de ejecución de todas las dualizaciones propuestas para diferentes valores del parámetro p , inicializando los multiplicadores en cero y en los valores duales respectivamente, para el valor de $\varepsilon = 6$. Se observa que para ambas formas de inicializar los multiplicadores de Lagrange D3 reporta mayor tiempo de ejecución. Además, entre ambas inicializaciones la diferencia del tiempo no es muy notoria en cada una de las dualizaciones.

Tiempo de ejecución promedio (seg) en 1000 iteraciones						
$p = 10$			$p = 20$			
5 5 20 2	D1	D2	D5	D3	D4	$f_2 \leq \varepsilon$
$u_0 = 0$	0.036	0.036	0.048	172.293	0.019	50
$u_0 = \text{duales}$	0.036	0.035	0.047	183.123	0.019	50

Tabla 5.12. Tiempo de ejecución de las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 50$.

Conclusión preliminar:

En este caso se obtienen observaciones similares a las obtenidas de la instancia anterior. Una de ellas es que al aumentar p para las dualizaciones D3 y D4, se puede notar que en ambas inicializaciones de los multiplicadores de Lagrange las dualizaciones convergen a un mismo número o este es muy parecido. Además, la convergencia es más rápida al inicializar los multiplicadores con 0 para D3 y D4 cuando ε es igual a 50.

El tiempo de ejecución es mayor para D3 en ambas formas de inicializar los multiplicadores de Lagrange. Sin embargo, el tiempo de ejecución es similar para todas las dualizaciones en $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$.

Teniendo en cuenta lo anterior, y considerando que la convergencia es mas rápida en algunas ocasiones para $u_0 = 0$ y en otras para $u_0 = \text{duales}$ en las dos instancias probadas, se decide dar los valores siguientes a los parámetros para asegurar la convergencia y obtener el conjunto de soluciones no dominadas de las diferentes dualizaciones:

- Para D1, D2 y D5 tomar $p = 10$
- Para D3 y D5 tomar $p = 20$
- Inicializar con $u_0 = 0$ en todas las dualizaciones.

5.4.2 Introducción de restricciones adicionales

En el capítulo anterior se mencionó que se deseaba investigar la conveniencia de agregar a cada una de las dualizaciones algunas restricciones redundantes (RR) al problema original, pero no a los subproblemas lagrangianos.

Como se esperaba, la calidad de las cotas entregadas por cada una de las dualizaciones fue mejor con la introducción de las restricciones redundantes, excepto para la dualización 3. Esto se debe a que en las otras dualizaciones se relajaron las restricciones de capacidad de los almacenes, aspecto importante en las restricciones redundantes agregadas. Sin embargo, en el caso de la dualización 3, esas restricciones no se relajaron, por lo que las RR no surten ningún efecto.

Fue necesario validar los valores de los parámetros que se obtuvieron en el experimento anterior, para lo cual se realizó un experimento en las dos mismas instancias anteriores obteniendo lo que se muestra en la Tabla 5.13:

	sin RR	con RR
D1	$p = 10$, $u_0 = 0$	$p = 25$, $u_0 = 0$
D2	$p = 10$, $u_0 = 0$	$p = 25$, $u_0 = 0$
D3	$p = 20$, $u_0 = 0$	$p = 35$, $u_0 = 0$
D4	$p = 20$, $u_0 = 0$	$p = 35$, $u_0 = 0$
D5	$p = 10$, $u_0 = 0$	$p = 25$, $u_0 = 0$

Tabla 5.13. Asignación de parámetros para las 5 dualizaciones.

Los resultados detallados de las dualizaciones anexando las RR en la instancia 3_3_4_2_001, pueden consultarse en el Apéndice B.

En los siguientes experimentos se considerará que las RR han sido añadidas con los parámetros correspondientes.

5.4.3 Evaluación preliminar del tiempo de cómputo requerido para resolver cada dualización

Otro aspecto importante a tener en cuenta es el tiempo de ejecución para resolver las diferentes dualizaciones. A continuación se presenta una gráfica que muestra el tiempo promedio que toma cada una de las dualizaciones.

La Figura 5.12 muestra el tiempo promedio obtenido considerando tres puntos para f_2 en la instancia 3_3_4_2_001 tomando $u_0 = 0$ y agregando las restricciones redundantes. Considerando que los subproblemas independientes se pueden resolver simultáneamente, se toma el tiempo consumido por el subproblema que tarda más en concluir.

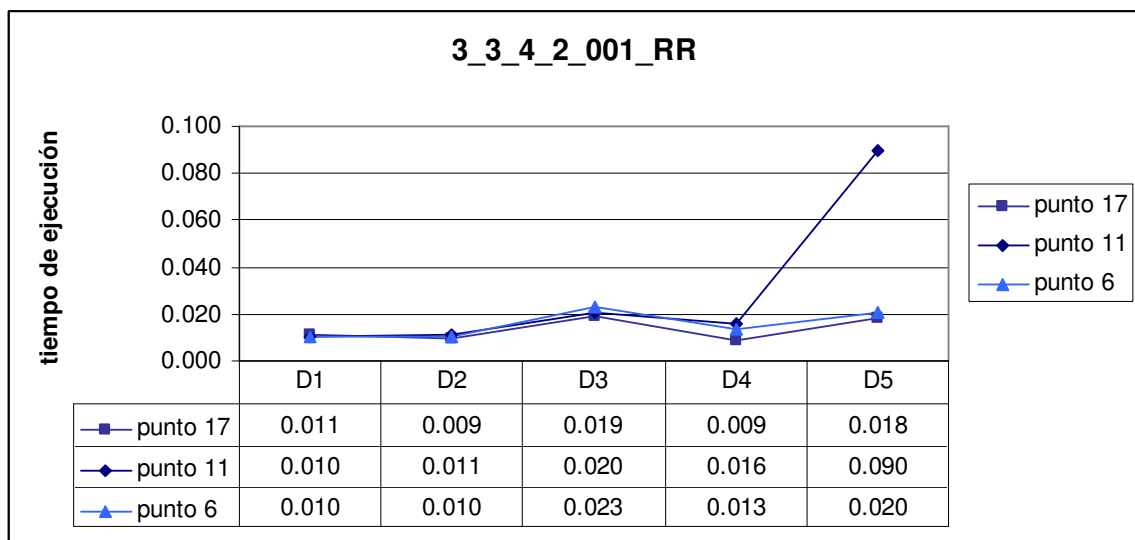


Figura 5.12. Tiempo de ejecución para $\varepsilon = 17$, $\varepsilon = 11$, $\varepsilon = 6$.

En la figura se observa que las dualizaciones D3 y D5 son las que reportan mayor tiempo de ejecución cuando $\varepsilon = 17$. Para $\varepsilon = 11$, D5 consume más tiempo de ejecución. En el valor $\varepsilon = 6$, la dualización D5 reporta el mayor tiempo.

Esta evaluación se considera preliminar dado que solamente se están tomando tres puntos de los valores posibles para f_2 .

5.4.4 Evaluación de conjuntos de acotamiento por todas las dualizaciones

5.4.4.1 Métricas de comparación

Para comparar un par de conjuntos eficientes S_1 y S_2 pueden usarse las siguientes medidas (Zitzler et al., 2003):

- El número de soluciones no dominadas $|S_i|$ en cada conjunto.
- El cociente o razón $R_{pos}(S_i)$. Esta métrica, usada por Altıparmak et. al (2006) para comparar diferentes algoritmos, es capaz de comparar más de dos conjuntos eficientes.

$$R_{pos}(S_i) = \frac{|\{s \in S_i : s \in P\}|}{|S_i|} \quad (5.2)$$

donde $P = \{s \in R : \nexists q \in R \text{ con } q < s\}$ y R es un conjunto formado por la unión de las soluciones eficientes de los r conjuntos $R = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_r$.

- Otra medida propuesta por Olivares-Benítez (2007) misma que también es utilizada en este trabajo, consiste en construir un conjunto T formado por aquellos valores de f_2 para los cuales existe el valor de f_1 en ambos conjuntos

comparados. Es decir, si para alguno de los valores considerados para f_2 (ya sea en S_1 ó bien en S_2) no existe el correspondiente valor de f_1 en alguno de los conjuntos comparados ese valor de f_2 no se considera en T :

$$T = \{f_2(s) \vee f_2(s'), s \in S_1, s' \in S_2 : \nexists f_1(s) \wedge f_1(s'), f_2(s) = f_2(s')\} \quad (5.3)$$

Entonces se calcula una desviación promedio con los cocientes de la función objetivo f_1 para cada valor de f_2 en el conjunto T :

$$\bar{D}(S_1, S_2) = \frac{\sum_{t \in T} \frac{f_1(s) : f_2(s) = t}{f_1(s') : f_2(s') = t}}{|T|} \quad \forall s \in S_1, s' \in S_2 \quad (5.4)$$

La idea es simple: para un valor fijo de f_2 el valor de $f_1(s)/f_1(s')$ es calculado solo si los valores de f_1 están disponibles en ambos conjuntos. Luego se calcula el promedio de esos cocientes. El valor mínimo D_{\min} y máximo D_{\max} de estos cocientes es calculado con las ecuaciones (5.5) y (5.6) respectivamente, donde D_{\min} es la desviación máxima y D_{\max} es la desviación mínima para un valor fijo de f_2 . Para más detalles consultar Olivares-Benítez (2007).

$$D_{\min}(S_1, S_2) = \min_{t \in T} \left(\frac{f_1(s) : f_2(s) = t}{f_1(s') : f_2(s') = t} \right) \quad \forall s \in S_1, s' \in S_2 \quad (5.5)$$

$$D_{\max}(S_1, S_2) = \max_{t \in T} \left(\frac{f_1(s) : f_2(s) = t}{f_1(s') : f_2(s') = t} \right) \quad \forall s \in S_1, s' \in S_2 \quad (5.6)$$

Las métricas $(\bar{D}, D_{\min}, D_{\max})$ fueron desarrolladas para dar un significado práctico a la comparación de dos conjuntos. Punto por punto, para un valor fijo

de f_2 se mide la diferencia del objetivo f_1 . Así, para un tiempo fijo se observa si la solución en un conjunto es más barata o más cara que la solución en el otro conjunto. El promedio de estos intervalos de optimalidad se calcula con \bar{D} , el valor mínimo de ellos se calcula con D_{\min} y el valor máximo con D_{\max} .

La métrica \bar{D} indica de alguna manera la calidad de un conjunto comparado con otro. Las métricas (D_{\min}, D_{\max}) indican la calidad de un punto comparado con otro. Entonces puede establecerse las siguientes relaciones (5.7) y (5.8):

$$\text{si } \bar{D}(S_1, S_2) = \begin{cases} < 1 & S_1 \text{ es mejor que } S_2 \\ > 1 & S_1 \text{ es peor que } S_2 \\ = 1 & S_1 \text{ es similar a } S_2 \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\text{si } D_{\min}(S_1, S_2), D_{\max}(S_1, S_2) = \begin{cases} < 1 & s \in S_1 \text{ es mejor que } s' \in S_2 \\ > 1 & s \in S_1 \text{ es peor que } s' \in S_2 \\ = 1 & s \in S_1 \text{ es similar a } s' \in S_2 \end{cases} \quad (5.8)$$

5.4.4.2 Comparación de las cotas entregadas por cada dualización contra el frente de Pareto óptimo

Para la evaluación de cada una de las dualizaciones propuestas se consideraron todas las instancias que fueron clasificadas como pequeñas. Se utilizó el método ε -R para encontrar los conjuntos acotadores de cada instancia, con decrementos en el parámetro ε de una unidad ($\delta = 1$). A continuación, en la Figura 5.13, se muestra los conjuntos acotadores inferiores para la instancia 5_5_5_2_001.

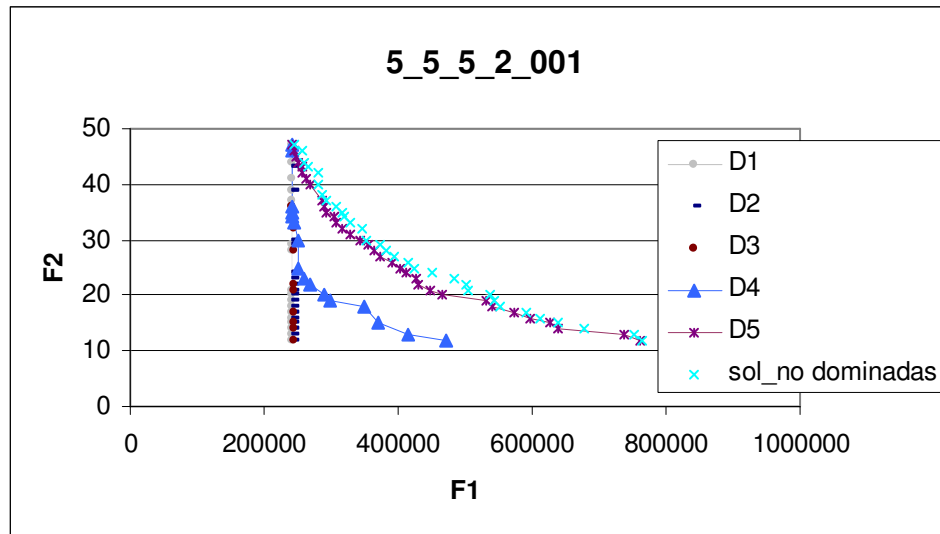


Figura 5.13. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_2_001.

En esta figura se pueden observar los conjuntos acotadores inferiores obtenidos de las 5 dualizaciones propuestas. Como se comentó en el capítulo anterior, las dualizaciones D1, D2 y D3 tienen un comportamiento vertical debido a que si se decrementa f_2 , f_1 no se incrementa notoriamente, debido a que se relajaron las restricciones del tiempo. Sin embargo, en el caso de las dualizaciones D4 y D5 sí se puede notar visualmente un incremento notorio en f_1 .

Se puede observar también que la dualización D5 se puede considerar como la dualización que genera un conjunto inferior de mejor calidad, si bien es la que más tiempo de cómputo consume, como se muestra en la Figura 5.14. La dualización D2 reporta menos tiempo, aunque su comportamiento no es útil ya que si no hay incremento en f_1 al decrementar f_2 , se puede obtener un conjunto acotador con pocos puntos.

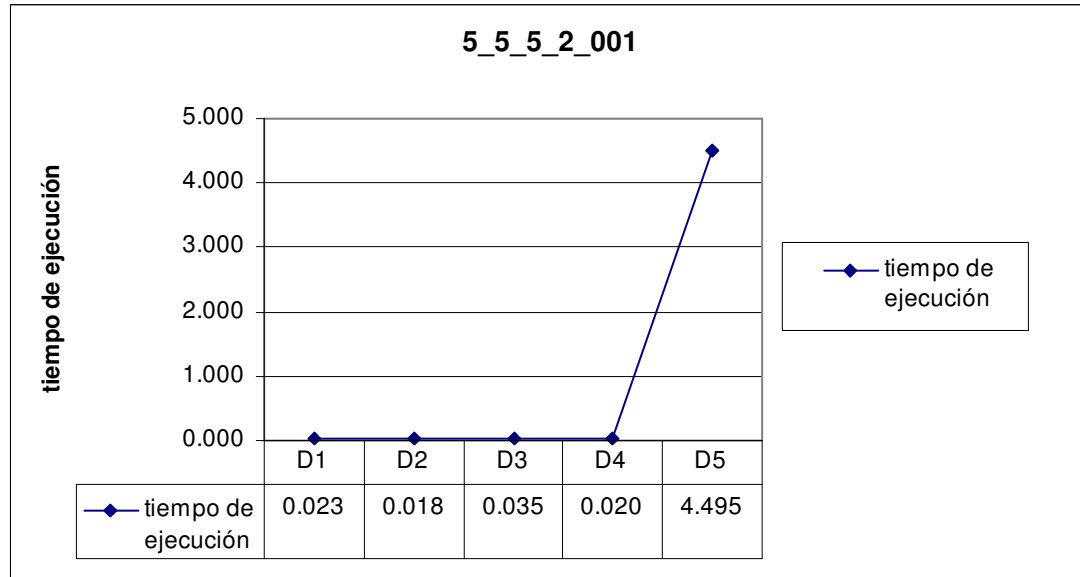


Figura 5.14. Tiempo de ejecución para la instancia 5_5_5_2_001.

En el Apéndice C se reportan los conjuntos inferiores de las 5 Dualizaciones para cada una de las instancias clasificadas como pequeñas.

Tamaño	Instancia	Tiempo promedio de ejecución (seg)					$\overline{D}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$				
		D1	D2	D3	D4	D5	D1	D2	D3	D4	D5
5_5_5_2	001	0.023	0.018	0.035	0.020	4.495	0.628	0.628	0.640	0.714	0.946
	002	0.022	0.018	0.071	0.032	9.049	0.744	0.744	0.762	0.764	0.985
	003	0.022	0.018	0.065	0.027	9.263	0.710	0.710	0.724	0.745	0.954
5_5_5_5	001	0.046	0.027	0.097	0.042	449.879	0.644	0.644	0.652	0.699	0.969
	002	0.044	0.027	0.094	0.128	35.985	0.715	0.715	0.718	0.762	
	003	0.066	0.027	0.084	0.127	62.726	0.723	0.723	0.727	0.763	
5_5_20_2	001	0.042	0.040	17.904	0.132	25.272	0.852	0.852		0.886	0.976
	002	0.043	0.043	258.590	0.112	13.524	0.828	0.828		0.847	
	003	0.039	0.039	362.140	0.140	119.322	0.799	0.798		0.818	

Tabla 5.14. Tiempo de ejecución y valor de $\overline{D}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ para las instancias pequeñas.

A continuación en las Tablas 5.14 y 5.15 se presenta el tiempo promedio de ejecución, el valor de $\overline{D}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$, $D_{\min}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ y $D_{\max}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$, para cada una de las instancias pequeñas en cada valor que puede tomar ε , donde $\text{Conj}D_i$ es el conjunto inferior de la dualización i y ConjMIP es

el conjunto de soluciones no dominadas del MIP. Cabe mencionar que las instancias 5_5_5_2_003, 5_5_5_5_001-5_5_5_5_003, 5_5_20_2_001- 5_5_20_2_003 en la dualización D5 entregan resultados de solo 3 puntos que toma ε (El valor máximo y mínimo que puede tomar f_2 , un punto intermedio entre el máximo y mínimo valor para f_2) debido al tiempo que consume, y las instancias 5_5_5_2_002 para D5 y 5_5_20_2_001 para D3 muestran resultados de algunos valores para ε .

Tamaño	Instancia	$D_{\min}(ConjD_i, ConjMIP)$					$D_{\max}(ConjD_i, ConjMIP)$				
		D1	D2	D3	D4	D5	D1	D2	D3	D4	D5
5_5_5_2	001	0.316	0.316	0.322	0.535	0.858	0.982	0.982	1.000	0.982	0.994
	002	0.405	0.405	0.415	0.524	0.958	0.976	0.976	1.000	0.976	1.000
	003	0.380	0.380	0.387	0.533	0.888	0.979	0.979	0.998	0.979	0.990
5_5_5_5	001	0.275	0.275	0.278	0.527	0.954	0.987	0.987	0.999	0.987	0.986
	002	0.338	0.338	0.340	0.559		0.996	0.996	1.000	0.996	
	003	0.312	0.312	0.314	0.517		0.993	0.993	0.990	0.993	
5_5_20_2	001	0.557	0.557		0.707	0.933	0.998	0.998		0.998	0.998
	002	0.548	0.548		0.661		0.998	0.998		0.998	
	003	0.526	0.525		0.634		0.998	0.998		0.998	

Tabla 5.15. Valores de $D_{\min}(ConjD_i, ConjMIP)$ y $D_{\max}(ConjD_i, ConjMIP)$ de las instancias pequeñas.

Observaciones sobre el tiempo de ejecución:

- Para las instancias de tamaño 5_5_5_2, la dualización D2 reporta menor tiempo de ejecución para las tres diferentes instancias y D5 reporta mayor tiempo de ejecución como se muestra en la Tabla 5.14.
- En las instancias de tamaño 5_5_5_5, D5 tarda más tiempo en obtener el conjunto inferior para las tres diferentes instancias. Cabe mencionar que en este tamaño de instancia no se obtuvo el conjunto acotador de la dualización D5 ya que tardaba demasiado en cada punto de f_2 .
- Para las instancias de tamaño 5_5_20_2, en las dualizaciones D5 y D3 se empieza a incrementar notoriamente el tiempo de ejecución. Las dualizaciones D2 y D1 reportan tiempos muy cercanos para obtener los conjuntos acotadores.

Observaciones de la calidad de las dualizaciones (no se consideran las instancias en las cuales f_1 no converge en algún punto para f_2):

- Para todas las instancias clasificadas como pequeñas, el mayor valor de $\bar{D}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ es el generado por la dualización D5. Note que mientras más cerca esté este cociente de 1, se considera de mejor calidad la relajación.

Si no se considera a dualización D5 debido al tiempo computacional que consume en cada valor para f_2 , se observa lo siguiente:

- Para las instancias de tamaño 5_5_5_2, el máximo valor de $\bar{D}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ es el generado por D4. De acuerdo con los valores en la Tabla 5.14, las soluciones producidas por D1 y D2 están más lejos de las soluciones no dominadas producidas del MIP.
- En las instancias de tamaño 5_5_5_5, la dualización D4 reporta valores más cercanos a 1 que la otras dualizaciones. Las dualizaciones D1 y D2 se consideran de menor calidad debido a que los valores arrojados se encuentran más lejos de 1.
- Para las instancias de tamaño 5_5_20_2, la dualización que entrega valores más cercanos a 1 es D4 y la que están más lejos de las soluciones no dominadas son D1 y D2.

En la Tabla 5.15 se muestra el valor $D_{\min}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ de cada dualización, el cual nos indica la desviación más alta del valor de f_1 para un valor fijo de f_2 . De la misma manera el valor $D_{\max}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ indica la desviación más pequeña del valor de f_1 para un valor fijo de f_2 .

Para todas las instancias D5 arroja el máximo valor entre los valores correspondientes al $D_{\min}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ mientras que para los valores correspondientes al valor máximo de $D_{\max}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ se obtiene de la dualización D3. Esto significa que para algunos valores fijos de f_2 , D3 es de mejor calidad, pero conforme se va decrementando f_2 , la dualización D5 da resultados de mejor calidad.

Además, con el valor $D_{\min}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ y $D_{\max}(\text{Conj}D_i, \text{ConjMIP})$ es más notorio el comportamiento vertical de las dualizaciones D1, D2 y D3 lo que significa que al decrementar f_2 , el valor de f_1 no tiene un incremento significativo.

Hasta el momento los resultados nos indican que si se consideran todas las dualizaciones para un instancia mayor, la D5 nos genera un conjunto acotador de mejor calidad, aunque el tiempo de ejecución es muy alto, mientras que D2 es la que reporta menos tiempo de ejecución, Sin embargo, al igual que D1, D2 es de más baja calidad debido a que al decrementar f_2 , el valor de f_1 no tiene un incremento significativo. Por otra parte, debido a este comportamiento el conjunto inferior puede resultar con pocas soluciones no dominadas.

Ahora bien, si solo se consideran las dualizaciones D1, D2 y D4 debido al tiempo de ejecución que consumen D3 y D5, las observaciones indican que la que genera un conjunto acotador de mayor calidad es D4, aunque lógicamente es la que mayor tiempo de ejecución reporta entre las tres .

En el Apéndice D aparecen los resultados del tiempo de ejecución, $\bar{D}(\text{Conj}R, \text{ConjMIP})$, $D_{\min}(\text{Conj}R, \text{ConjMIP})$ y $D_{\max}(\text{Conj}R, \text{ConjMIP})$ de las relajaciones propuestas en el trabajo de Olivares-Benítez (2007). El propone 4 esquemas de conjuntos acotadores inferiores basados en relajación lineal del MIP:

1. La relajación lineal del MIP (LR).
2. La relajación lineal con cortes (LPc): relajación lineal del MIP después de aplicar los cortes que CPLEX usa para preprocesar.
3. La relajación lineal de las variables A_{ijl} y B_{jkl} (ABr).
4. La relajación lineal de las variables Z_j (Zr).

El objetivo de sus experimentos fue estudiar la calidad de los conjuntos acotadores inferiores obtenidos por los 4 esquemas propuestos y así evaluar la eficiencia del método aproximado que él propone para dar solución al problema.

En los experimentos que realiza Olivares-Benítez, la relajación Zr resulta de mejor calidad pero es la que se tarda más en obtener el conjunto inferior. RL reporta menor tiempo de ejecución y en comparación con la dualización D1, D2 y D4, las últimas consumen menor tiempo que RL.

La dualización D4 consume menos tiempo que cualquiera de las relajaciones propuestas por Olivares-Benítez (2007). En el Apéndice D aparecen las Tablas D.3 a la D.6 donde se calcula una desviación entre las dualizaciones y cada esquema de relajación propuesto por Olivares-Benítez. Esta desviación se calcula por medio de un intervalo de optimalidad (IO). Este intervalo de optimalidad es calculado de la siguiente manera:

$$IO = \frac{UB - LB}{UB} * 100 \quad (5.9)$$

donde UB y LB son una cota superior e inferior respectivamente.

Cabe mencionar que para obtener el IO se tomó la desviación promedio \bar{D} de las dualizaciones y cada esquema de relajación mencionado anteriormente. De acuerdo a los resultados que se ofrecen en el Apéndice D, en las Tablas D.3 a la D.6 se observa que, de las 9 instancias probadas, en 8 la cota obtenida por Zr fue mejor que D4 con un

intervalo de optimalidad de 11.96 %. Sin embargo el tiempo de respuesta de D4 fue instantáneo mientras que Zr consume mucho tiempo computacional. En las 9 instancias probadas la cota obtenida por D4 fue mejor que RL con un intervalo de optimalidad de 11.79. Además, el tiempo de consumo de la RL es 1.15 veces el promedio de tiempo de D4. De las 9 instancias probadas en 8 la cota obtenida por D4 es de mejor calidad con respecto a ABr, con un intervalo de optimalidad de 3.05%. Incluso el tiempo computacional consumido por ABr es de 82.423 veces el promedio de D4.

Con todas estas observaciones se decide utilizar la dualización D4 en la segunda fase de la experimentación y se recomienda como mejor compromiso entre calidad y tiempo.

5.5 Fase II del experimento computacional

En esta segunda fase de la experimentación se utiliza la dualización D4 con parámetros $p = 35$, $u_0 = 0$ y agregando las restricciones redundantes RR para cada una de las instancias clasificadas como grandes. En estos casos las soluciones factibles utilizadas en el algoritmo de optimización por subgradiente no se obtuvieron a través de la heurística propuesta en el Capítulo 4, sino se tomaron del frente aproximado obtenido por Olivares-Benítez (2007).

La Tabla 5.16 y la Figura 5.15 muestran los conjuntos inferiores y el tiempo consumido para las instancias de tamaño 5_20_20_2 respectivamente. Se observa el conflicto entre f_1 y f_2 .

	5_20_20_2		
	001	002	003
f_2	f_1		
50			
49			
48			
47			
46			
45			
44			
43			
42			
41			
40			
39			
38			
37	1049748.294		
36			1020817.431
35	1049748.319		
34			1020825.489
33	1049745.934	1081908.403	1020837.687
32	1049753.662		1021081.293
31		1082050.224	
30		1083023.420	
29			
28			
27			
26			
25	1050249.248	1083216.030	1021251.042
24	1070627.622	1114972.687	1046143.938
23	1099534.199	1135417.162	1071636.760
22	1135318.459	1163970.373	1103689.413
21	1175028.761	1200662.778	1138542.038
20	1198616.559	1236927.480	1191107.631
19	1231723.193	1287637.713	1216687.265
18	1291365.909	1347534.849	1259695.041
17	1335733.409	1370732.550	1318788.147
16	1381629.938	1431803.462	1390992.458
15	1446868.372	1494588.023	1463891.830
14	1527234.210	1567287.191	1511620.227
13	1604577.755	1669060.901	1599896.038
12		1773219.221	

Tabla 5.16. Conjuntos acotadores inferiores de las instancias de tamaño 5_20_20_2.

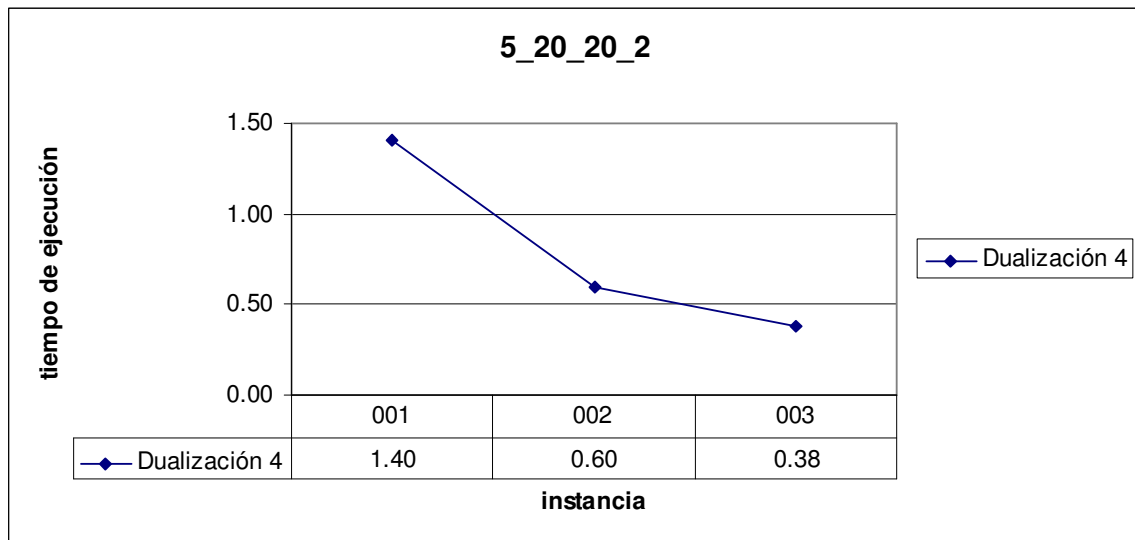


Figura 5.15. Tiempo de ejecución de las instancias de tamaño 5_20_20_2.

Para las tres instancias de tamaño 20_20_20_5, solamente se obtuvieron los valores de f_1 para tres valores de ε , debido al tiempo que se consume en cada punto, como se observa en las Tablas 5.17 a 5.19. Cabe mencionar que se considera el tiempo de ejecución del subproblema que consume mayor tiempo (subproblema 2 de D4). Además, en las instancias 20_20_20_5_001 y 20_20_20_5_003 para $\varepsilon=50$, el método de optimización por subgradiente converge a 1037054.75 y 1012733 respectivamente. Para los otros valores de ε aún no se tenía la convergencia al momento de parar la ejecución del programa. Por ello se reporta en las tablas el máximo valor que arroja el método de optimización por subgradiente.

20_20_20_5_001		
	D4	Tiempo de ejecución
$\varepsilon = 50$	1037054.75	33.651
$\varepsilon = 30$	1036972.87	93.571
$\varepsilon = 10$	1352301.85	92.645

Tabla 5.17. Valor de f_1 de D4 para la instancia 5_20_20_2_001.

20_20_20_5_002		
	D4	Tiempo de ejecución
$\varepsilon = 50$	1070069.41	25.788
$\varepsilon = 20$	763773.51	746.460
$\varepsilon = 11$	1565128.64	85.136

Tabla 5.18. Valor de f_1 de D4 para la instancia 5_20_20_2_002.

20_20_20_5_003		
	D4	Tiempo de ejecución
$\varepsilon = 50$	1012733.18	15.443
$\varepsilon = 20$	911094.19	649.818
$\varepsilon = 11$	1506384.63	242.431

Tabla 5.19. Valor de f_1 de D4 para la instancia 5_20_20_2_003.

Instancia		
	20_20_20_5_001	50_50_50_2_001
f_2	f_1	
35		
34	1037047.104	2547162.770
33		
32		
31	1037048.805	
30	1037050.095	
29		
28		
27		
26		2557449.780
25	1037142.024	2557450.330
24	1061629.573	2619837.690
23	1088574.947	2634719.360
22	1117887.674	2682151.730
21	1149871.682	
20	1186440.295	
19	1224197.164	2742104.560
18	1267430.639	3138074.100
17	1313687.471	3174526.540
16	1368163.136	
15	1410771.735	
14	1428316.750	3249292.510
13		
12		3260715.030
11	1397809.600	3275677.110
10	1434570.736	
Tiempo de ejecución	0.512	1.431

Tabla 5.20. Conjuntos acotadores inferiores de D4 para las instancias de tamaño 20_20_20_5 y 50_50_50_2.

Como se mencionó en el Capítulo 4, de acuerdo con la estructura de la dualización 4, los subproblemas se pueden particionar en problemas más pequeños sin agregar las restricciones redundantes (4.66) y (4.67). Por lo tanto, para obtener los conjuntos acotadores de las instancias de tamaño 20_20_20_5_001 y 50_50_50_2_001, considerando la información obtenida de D4, se resuelve el subproblema 3 por separado para j problemas independientes. Los conjuntos acotadores se muestran en la Tabla 5.20. Así, como el tiempo promedio consumido del subproblema 3. Se observa que el tiempo computacional promedio de todos los valores que toma ε es mucho menor que el tiempo reportado en la Tabla 5.17 para tres valores para ε .

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES

6.1 Resumen

El problema que se aborda en esta tesis se basa en un diseño de cadena de suministro de dos etapas en donde el producto es enviado de las plantas manufactureras a las bodegas en la primera etapa y de éstas a los centros de distribución en la segunda. En la segunda etapa se tiene la restricción de que cada centro de distribución sea abastecido desde un solo almacén. El número de plantas y el número de centros de distribución existentes se suponen conocidos con certeza, así como las capacidades asociadas a las plantas y las demandas de los centros de distribución. Una de las decisiones que deben tomarse concierne a cuáles almacenes abrir de entre un conjunto de localizaciones potenciales. Los almacenes tienen asociados una capacidad y un costo fijo por abrirse, el cual está en dependencia del lugar en donde se localicen.

Además de lo anterior se consideran varias opciones para el transporte del producto entre instalaciones en cada etapa. Cada opción representa un tipo de servicio y se describe a través del costo de transportación y el tiempo entre instalaciones. Estas magnitudes están correlacionadas negativamente. La otra decisión que debe tomarse concierne a la selección de los tipos de servicio para transportar el producto a través de la red.

El problema bajo estudio considera simultáneamente dos objetivos importantes que se encuentran en conflicto:

- Minimizar el costo combinado de transportación y apertura de instalaciones
- Minimizar el tiempo máximo de transportación desde las plantas hasta los centros de distribución.

Este problema está clasificado como NP-duro y dada su complejidad ha sido necesario acudir a desarrollos de métodos aproximados para solucionarlo. En estos casos es importante contar con cotas inferiores y superiores que permitan avalar la eficiencia de los métodos de solución propuestos.

Por ello, el objetivo de esta tesis es el desarrollo de cotas inferiores de calidad que permitan la evaluación de los métodos aproximados que han sido desarrollados para resolver problemas de este tipo. Sin embargo, dado que estamos en presencia de un problema bi-objetivo, el enfoque de la tesis es el de desarrollar estrategias para obtener un conjunto de valores que acotan inferiormente el conjunto óptimo de Pareto.

Para tal fin se decidió utilizar la relajación lagrangiana, y se propusieron cinco dualizaciones que tienen en cuenta diferentes aspectos de la estructura del problema. Estas dualizaciones fueron comparadas mediante un estudio computacional para lo cual se tomaron instancias utilizadas en la literatura que fueron clasificadas como pequeñas y grandes. Para las instancias pequeñas se conoce el frente óptimo de Pareto, mientras que para las grandes solo se conoce el frente aproximado entregado por la metodología propuesta por Olivares-Benítez (2007).

El método utilizado para resolver el dual lagrangiano fue el método de optimización por subgradiente. Se realizaron experimentos con instancias pequeñas para determinar el valor adecuado de los parámetros para cada una de las dualizaciones. A continuación se presentan las conclusiones generales de este trabajo.

6.2 Conclusiones

La primera parte de los experimentos estuvo dedicada a la calibración de los parámetros para garantizar la convergencia del método de optimización por subgradiente, los cuales no resultaron ser los mismos para todas las dualizaciones estudiadas.

Una conclusión importante está relacionada a la conveniencia de añadir restricciones adicionales que son redundantes al problema original, pero no al problema lagrangiano. En todas las dualizaciones, excepto D3, esto produjo cotas lagrangianas de mejor calidad. En el caso de D3 no fue así porque las restricciones propuestas también son redundantes al subproblema lagrangiano. Sin embargo, esto en algunos casos puede elevar el tiempo computacional debido, por ejemplo, debido a que la agregación de las restricciones redundantes impide la descomposición del problema en subproblemas independientes más pequeños.

Otro aspecto a destacar es los resultados obtenidos en cuanto a la inicialización de los multiplicadores de Lagrange. Se probaron las dos formas más usuales para esto: inicializarlos en cero o con los valores obtenidos para las variables duales en la solución óptima de la relajación lineal. En la mayoría de los casos, al inicializar en cero los multiplicadores de Lagrange se obtienen mejores resultados que cuando se inicializan con los valores de las variables duales y además, cuando esto no sucede, la diferencia no es significativa. Por ello, se concluye que es recomendable inicializar en cero los multiplicadores de Lagrange, evitando así la necesidad de resolver el problema lineal, el cual es ya complejo.

En cuanto a la calidad de los resultados entregados por cada una de las dualizaciones, la que entrega los mejores resultados es la dualización D5, sin embargo es la que consume más tiempo computacional.

La dualización D2 es la que consume menor tiempo de ejecución, pero es la que muestra menos calidad entre todas las dualizaciones. Más aún, considerando el comportamiento vertical de los valores del dual lagrangiano al decrementar la cota de la función del tiempo, no se garantiza que resulte de mejor calidad que la relajación lineal. Este comportamiento también es observado para las dualizaciones D1 y D3. La dualización D4 es la que representa un mejor compromiso entre calidad y tiempo.

Otro aspecto interesante es la comparación con los conjuntos acotadores que propone Olivares-Benítez (2007) para las mismas instancias consideradas en este trabajo. En cuanto a tiempo computacional la dualización D4 consume menos tiempo que las relajaciones propuestas por Olivares-Benítez. En cuanto a calidad es aventajada por las dos mejores relajaciones propuestas por Olivares-Benítez (Zr y LPc). Sin embargo, el tiempo de cómputo que requiere Zr es muy grande y por otra parte la diferencia promedio en calidad con respecto a LPc es pequeña (7.93%) y el tiempo que requiere D4 es mucho menor que el que requiere LPc.

En relación a la heurística propuesta en este trabajo para la obtención de una solución inicial factible en cierto valor de la función del tiempo, podemos decir que se comportó bien para las instancias pequeñas, sin embargo su tiempo de ejecución creció mucho para las instancias más grandes. Ahora bien, dado que la calidad de esta solución factible influye en la calidad de las cotas obtenidas se recomienda, que en caso de que el tiempo impida utilizar esta heurística, se seleccione cuidadosamente el valor de la solución factible.

6.3 Trabajo futuro

Como se ha comentado arriba, se propusieron cinco diferentes relajaciones, para el problema tratado en esta tesis, de las cuales D4 es la relajación o dualización más prometedora en cuanto a calidad y tiempo según muestran los resultados computacionales. Una posible extensión de este trabajo es desarrollar algoritmos de

Ramificación y Acotación basados en esta dualización para resolver el problema bi-objetivo.

Como se mencionó en el capítulo anterior, se decidió considerar a D4 para obtener los conjuntos acotadores de las instancias clasificadas como grandes. Sin embargo para algunas instancias no se pudo obtener todo el conjunto acotador inferior, debido al tiempo que consume uno de los subproblemas en los que se particiona el problema lagrangiano. Más aún, al agregar las restricciones redundantes este subproblema no puede descomponerse más y está siendo resuelto en esta tesis como un modelo entero mixto. Por lo tanto una de los trabajos a futuro es estudiar más a detalle la estructura de este subproblema para derivar métodos eficientes de solución.

Otro aspecto importante es que la heurística utilizada para obtener una solución factible en el método de optimización por subgradiente no resulta ser eficiente para instancias grandes. Por ello se hace necesario estudiar más a fondo este aspecto para desarrollar e implementar un método eficiente para obtener las soluciones factibles que requiere el método de optimización por subgradiente para el cálculo de la longitud de paso.

Otra posible vertiente que valdría la pena investigar sería la utilización de algún otro método (en sustitución del algoritmo subgradiente) para resolver el problema dual lagrangiano. Por ejemplo el método del dual ascendente, método de generación de columnas, método de generación de restricciones, entre otros (Guignard, 2003). La aplicación de estos métodos puede redundar en mejores resultados.

Por último, las dualizaciones aquí propuestas podrían servir de base a heurísticas lagrangianas que permitan obtener soluciones aproximadas de calidad al problema original. En general las soluciones obtenidas resolviendo los problemas lagrangianos pueden no ser factibles para el problema original. Entonces es necesario diseñar una estrategia que obtenga a partir de ahí una solución factible. Sin embargo, esta estrategia

dependerá de cuál de los cinco esquemas de dualización se está considerando, esto es de cuáles restricciones fueron dualizadas.

APÉNDICE A

En las Figuras A.1-A.36 se presenta el comportamiento de la convergencia de D2, D3, D4 y D5 en tres puntos que toma ε : 6, 11, 17 para la instancia 3_3_4_2_001 y las Figuras A.37-A.39 muestran la convergencia de la instancia 5_5_20_2_001 para $\varepsilon = 50$, considerando hasta 100 iteraciones.

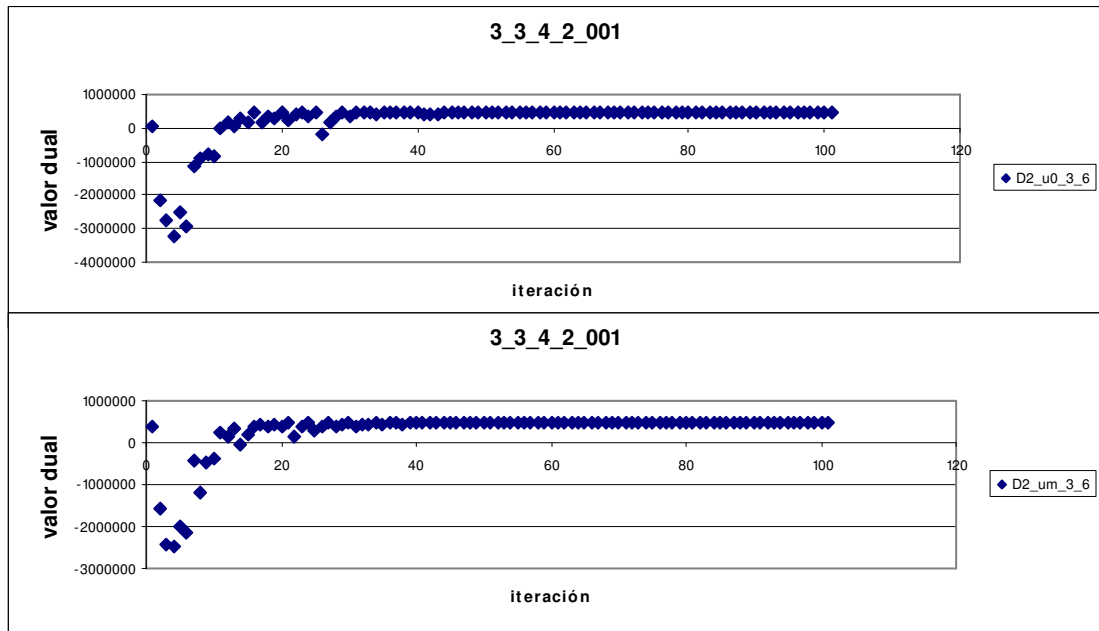


Figura A.1. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 6.

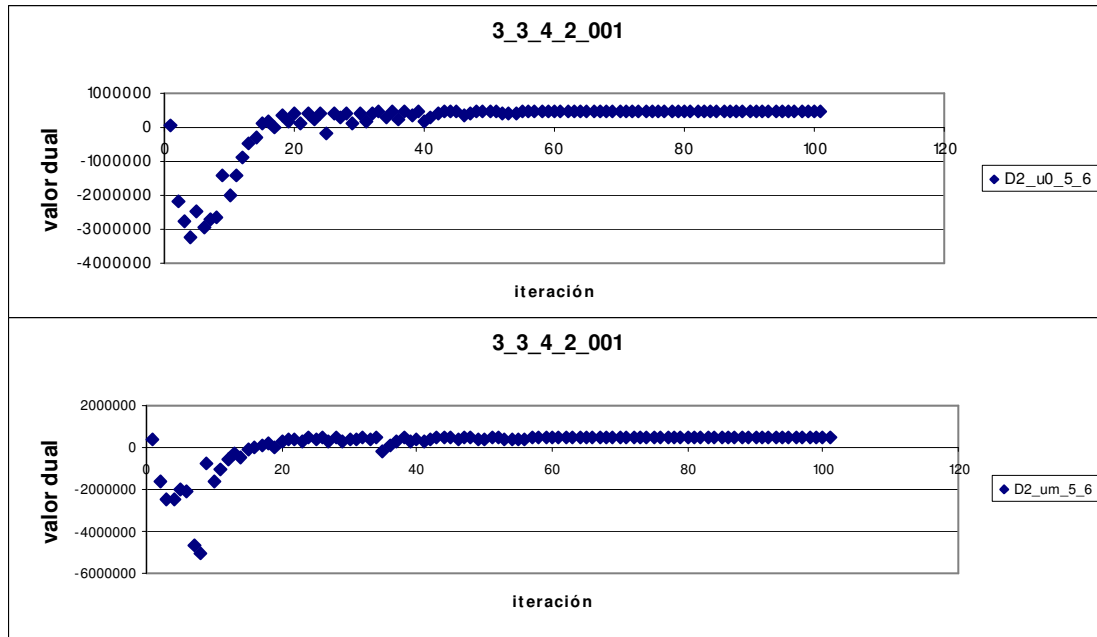


Figura A.2. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 6.

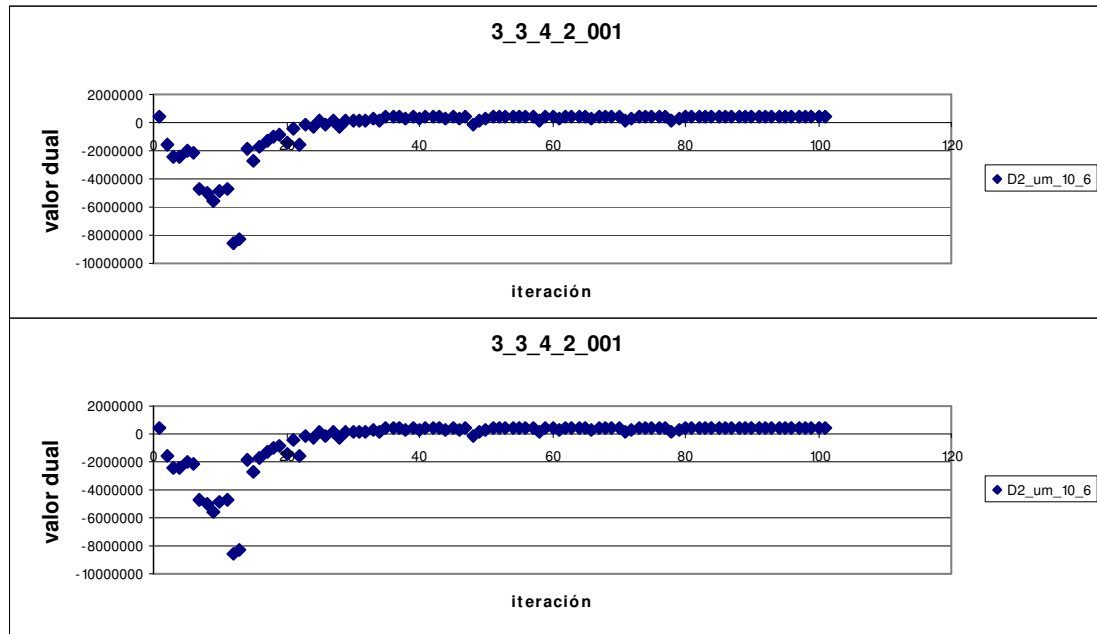


Figura A.3. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 6.

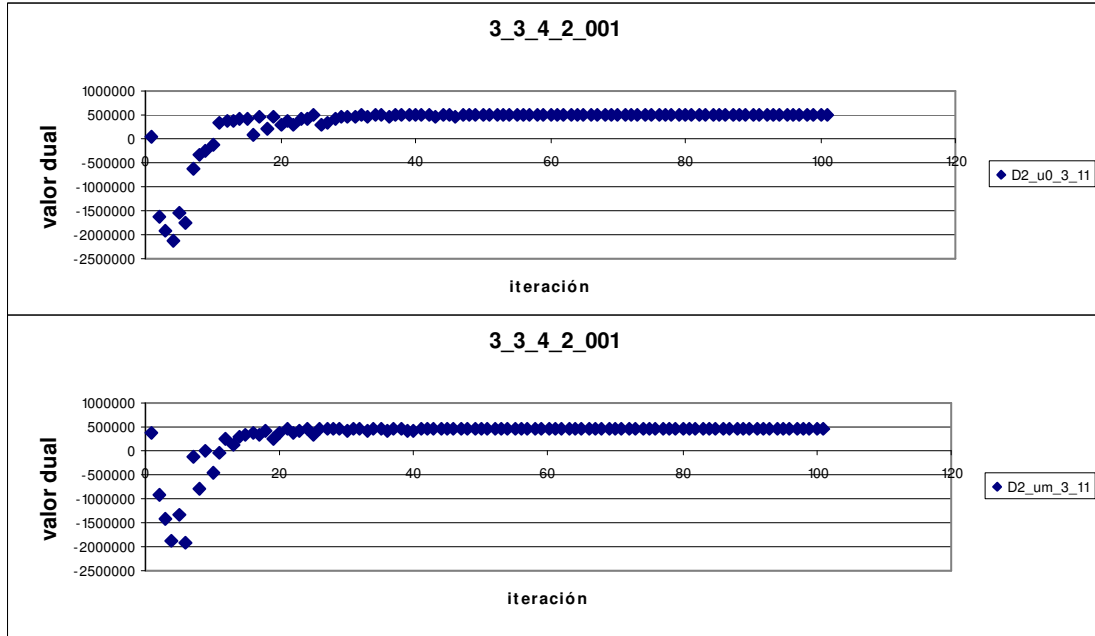


Figura A.4. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ con $p = 3$ en el punto 11.

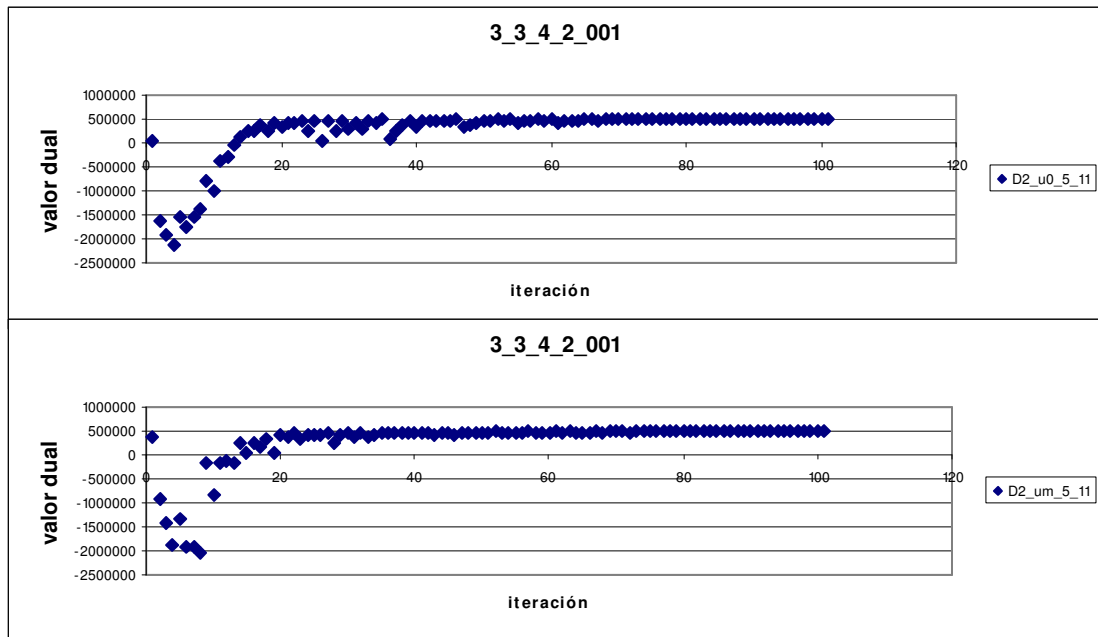


Figura A.5. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ con $p = 5$ en el punto 11.

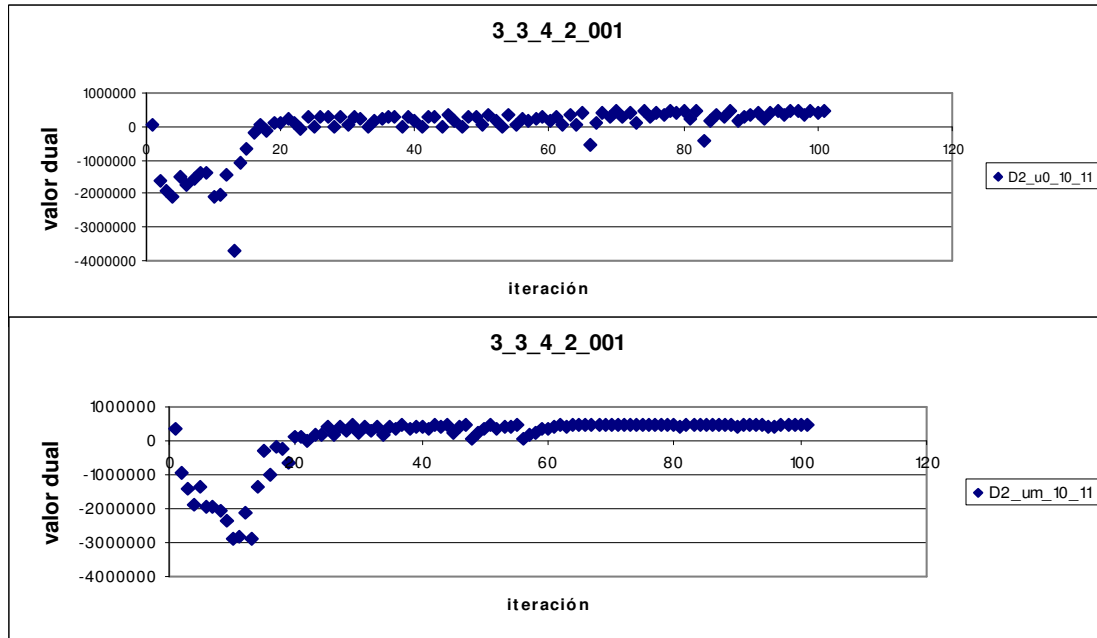


Figura A.6. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 11.

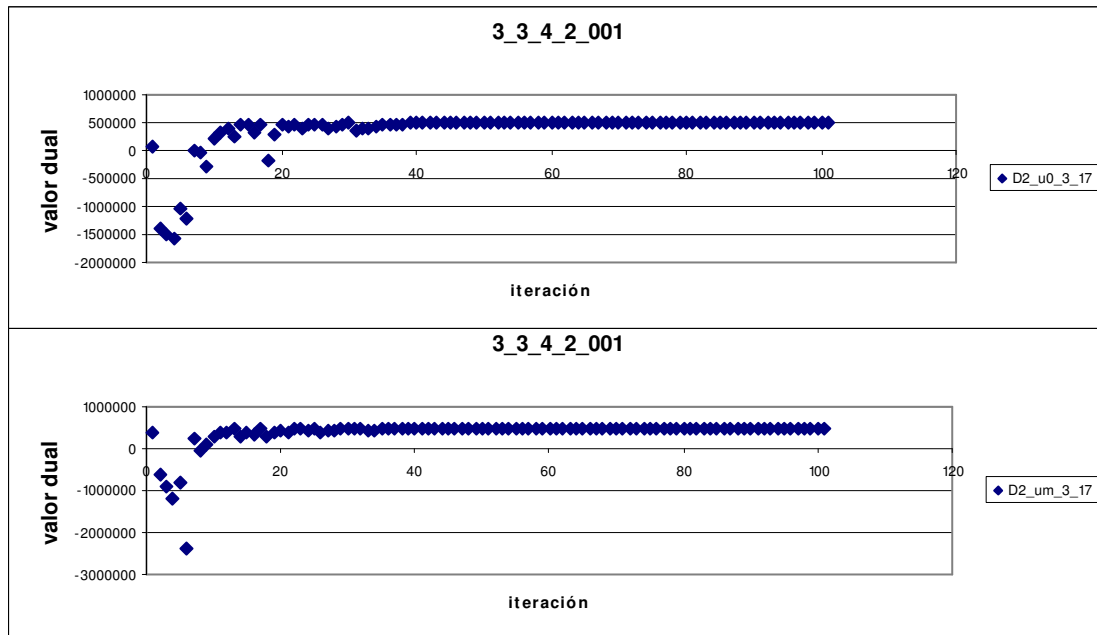


Figura A.7. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 17.

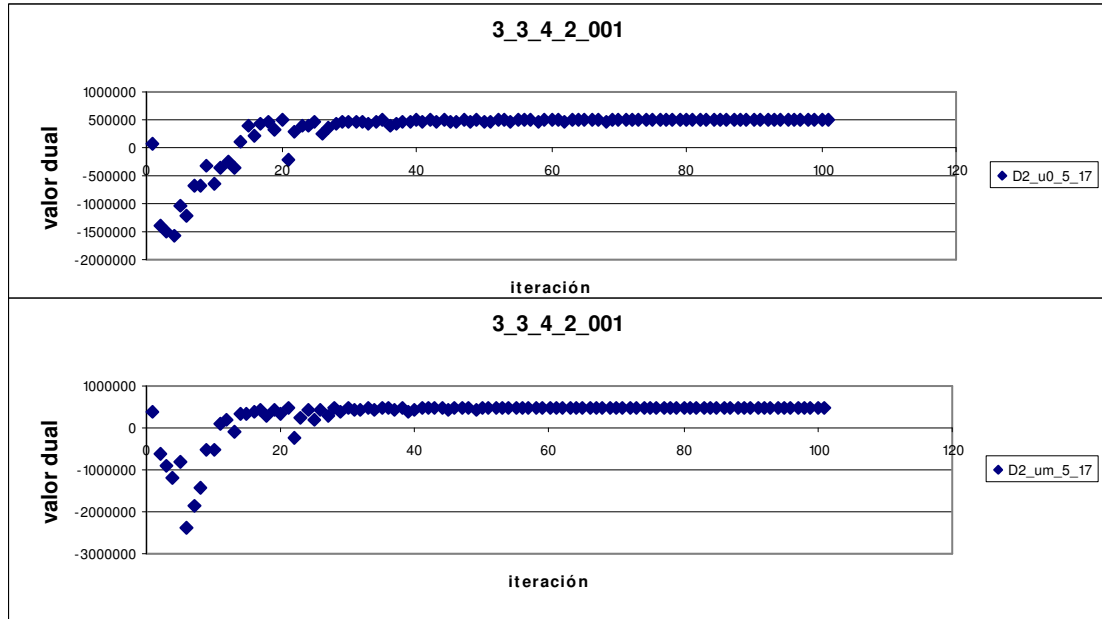


Figura A.8. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ con $p = 5$ en el punto 17.

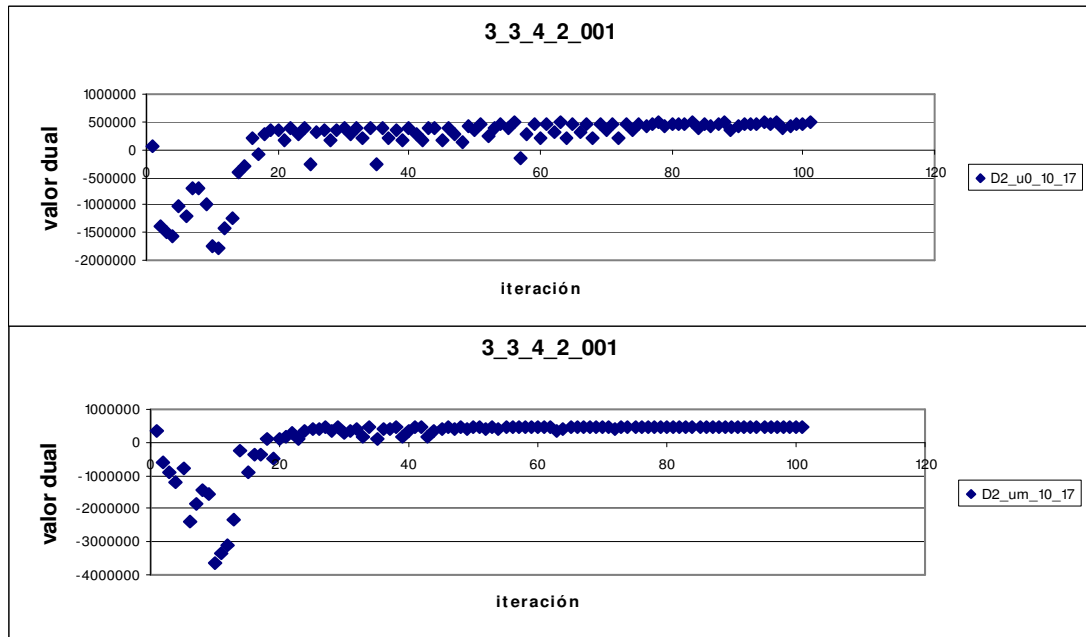


Figura A.9. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ con $p = 10$ en el punto 17.

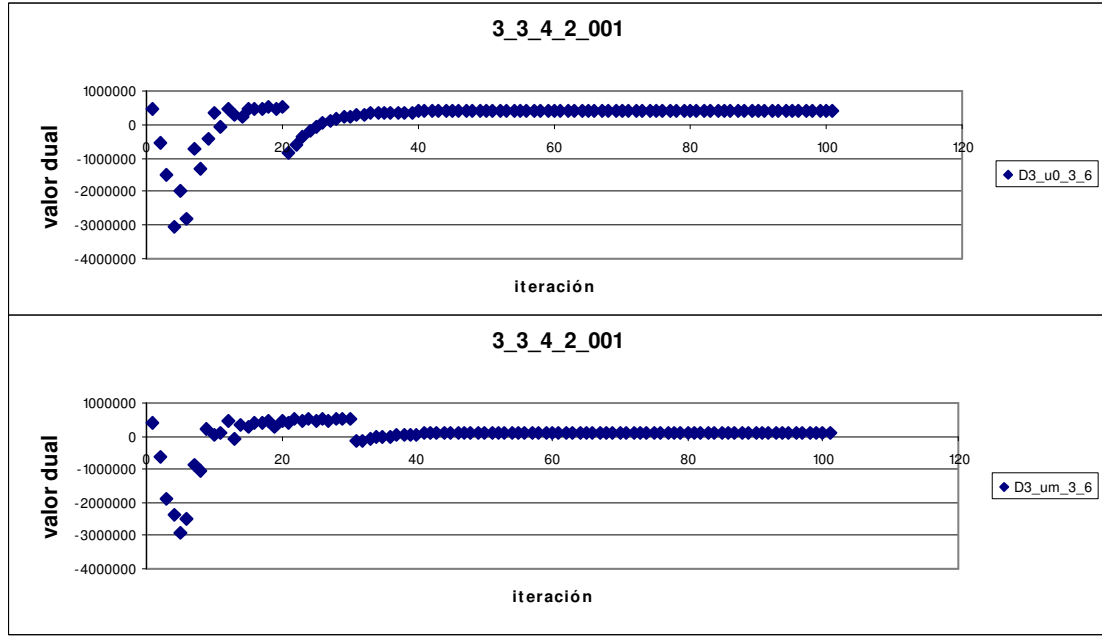


Figura A.10. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 6.

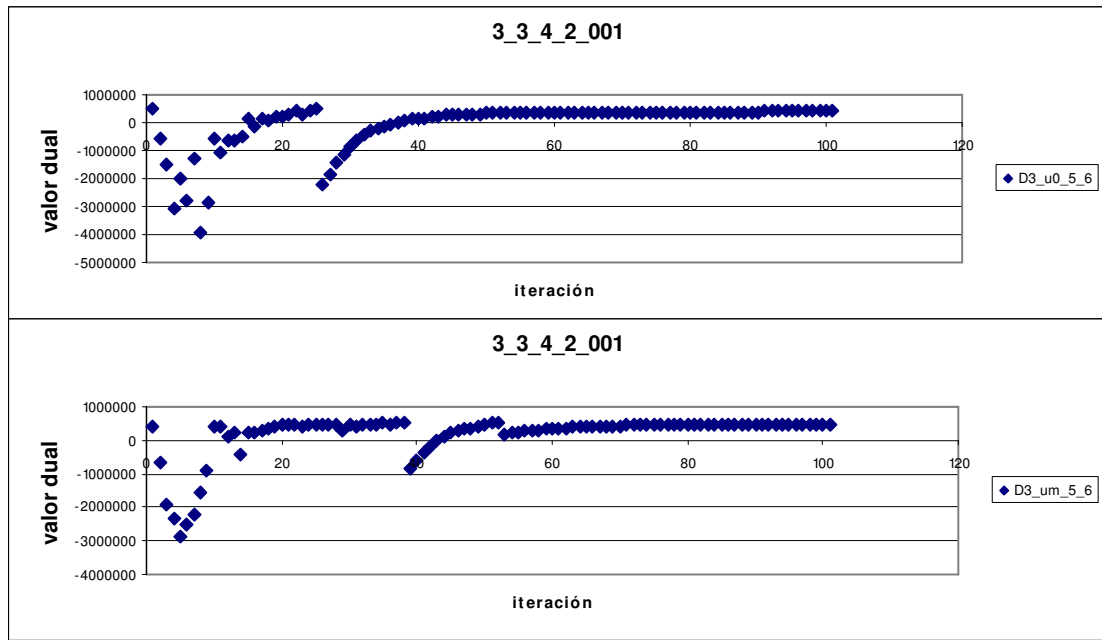


Figura A.11. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 6.

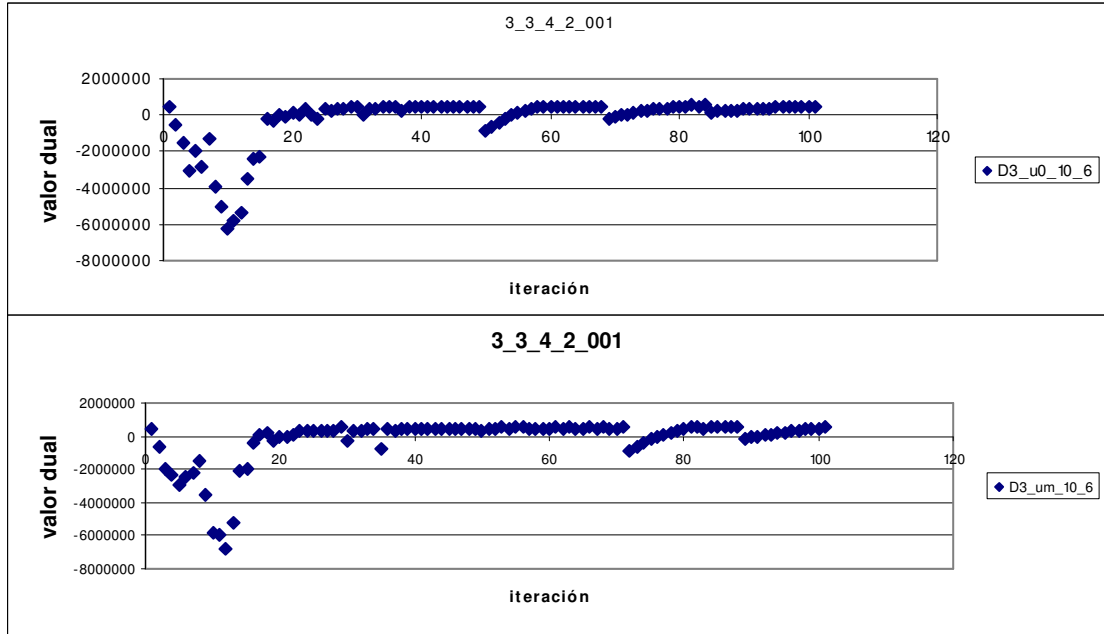


Figura A.12. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ con $p = 10$ en el punto 6.

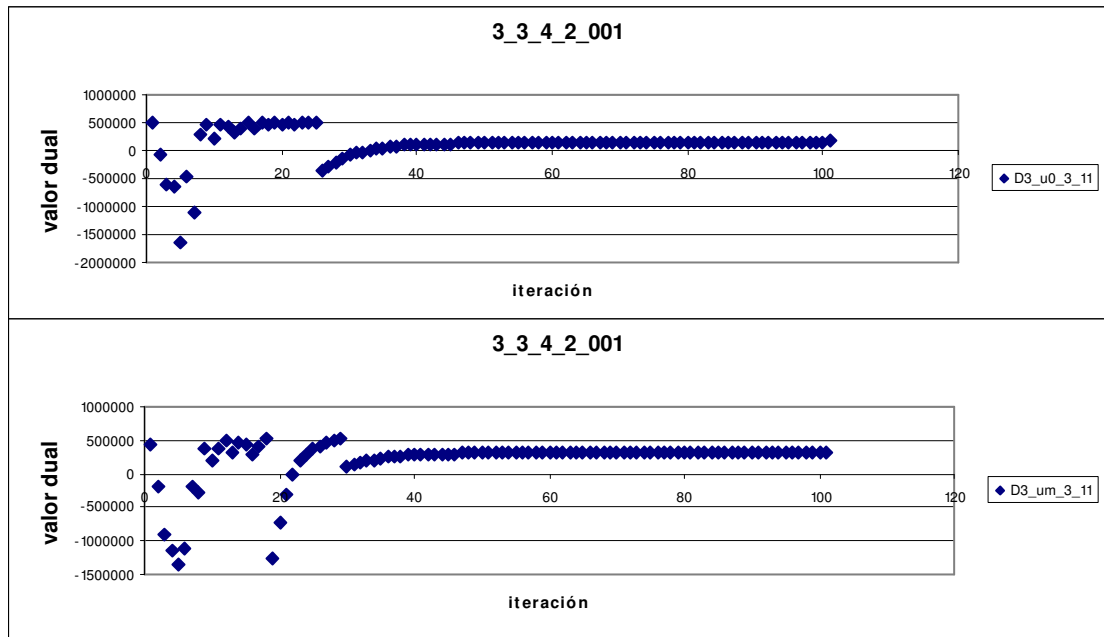


Figura A.13. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ con $p = 3$ en el punto 11.

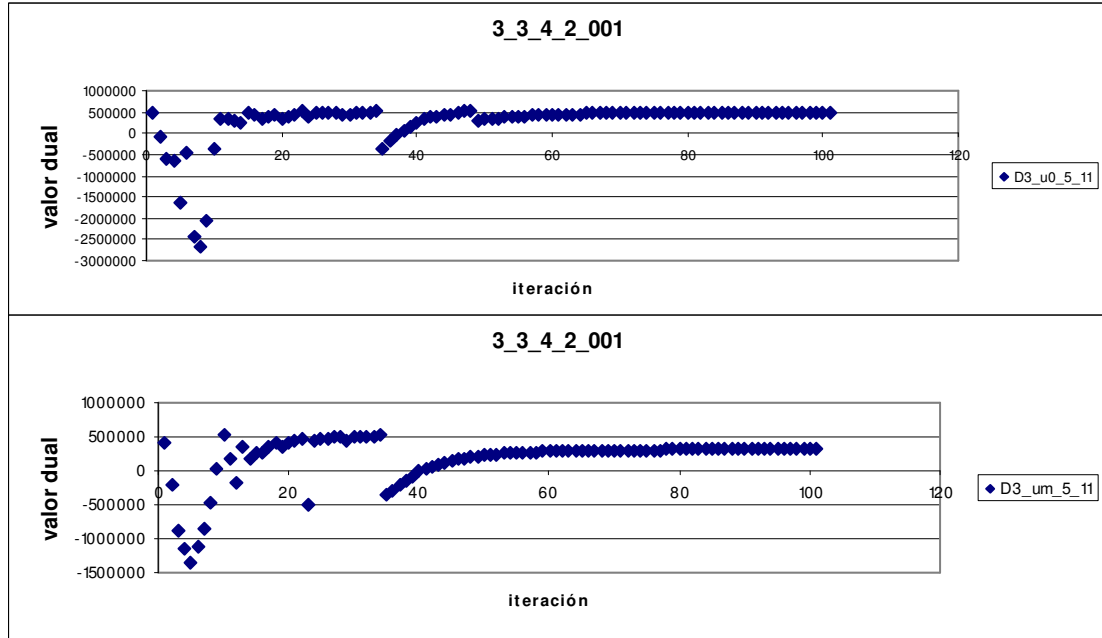


Figura A.14. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ con $p = 5$ en el punto 11.

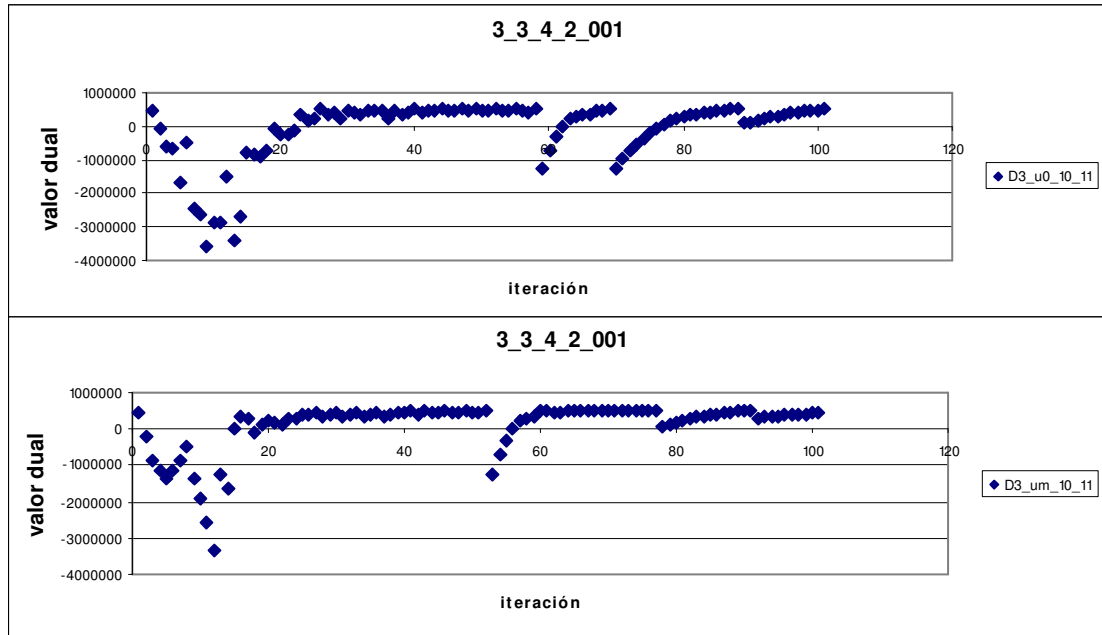


Figura A.15. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ con $p = 10$ en el punto 11.

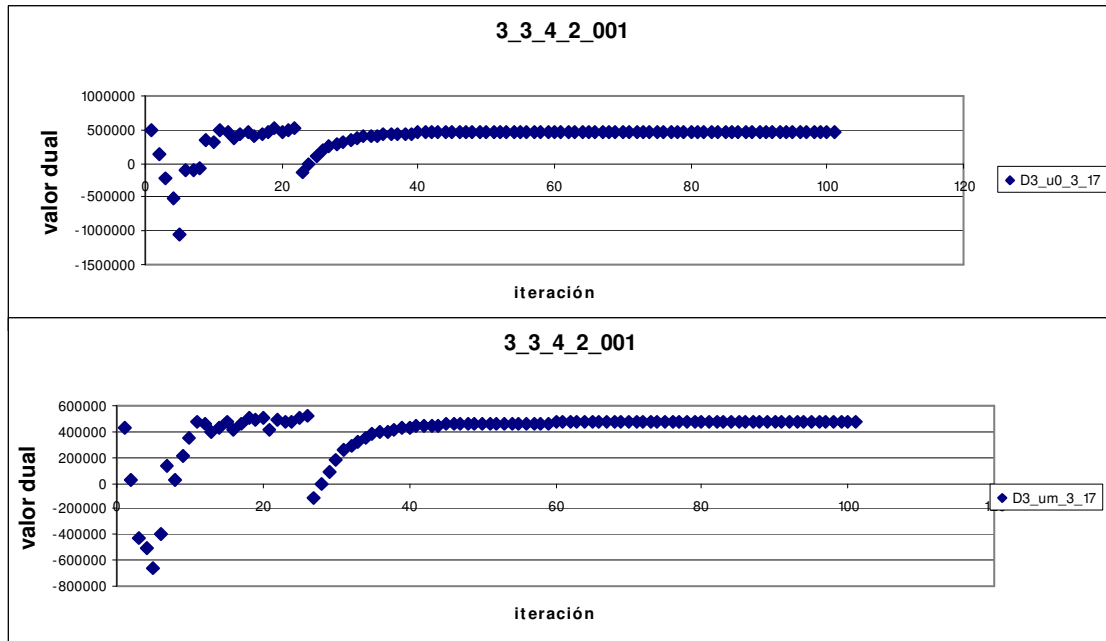


Figura A.16. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ con $p = 3$ en el punto 17.

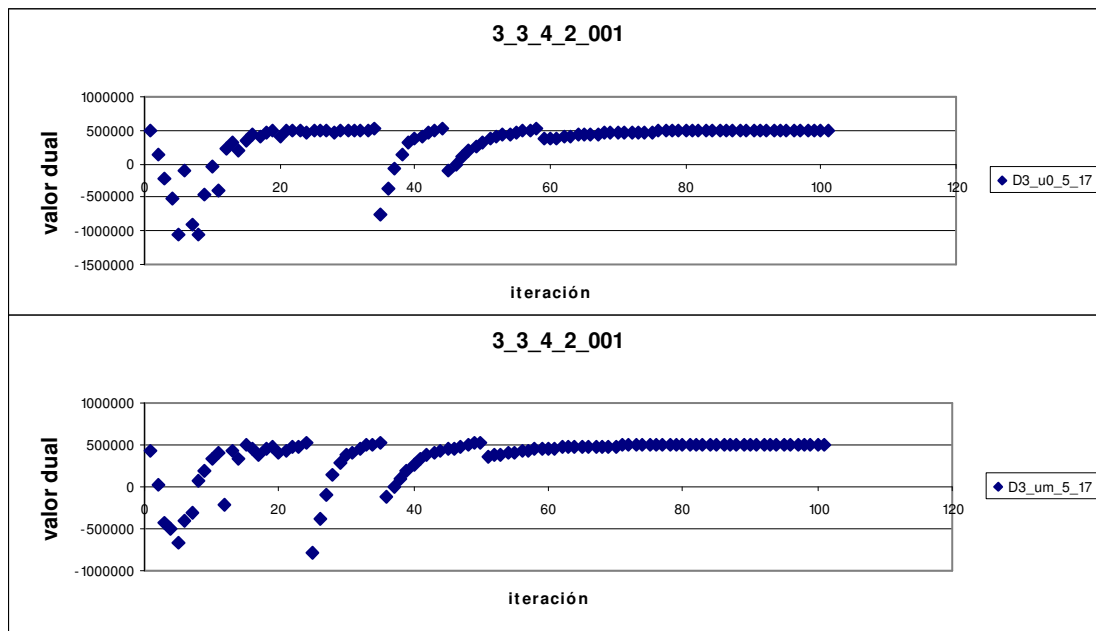


Figura A.17. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duals}$ con $p = 5$ en el punto 17.

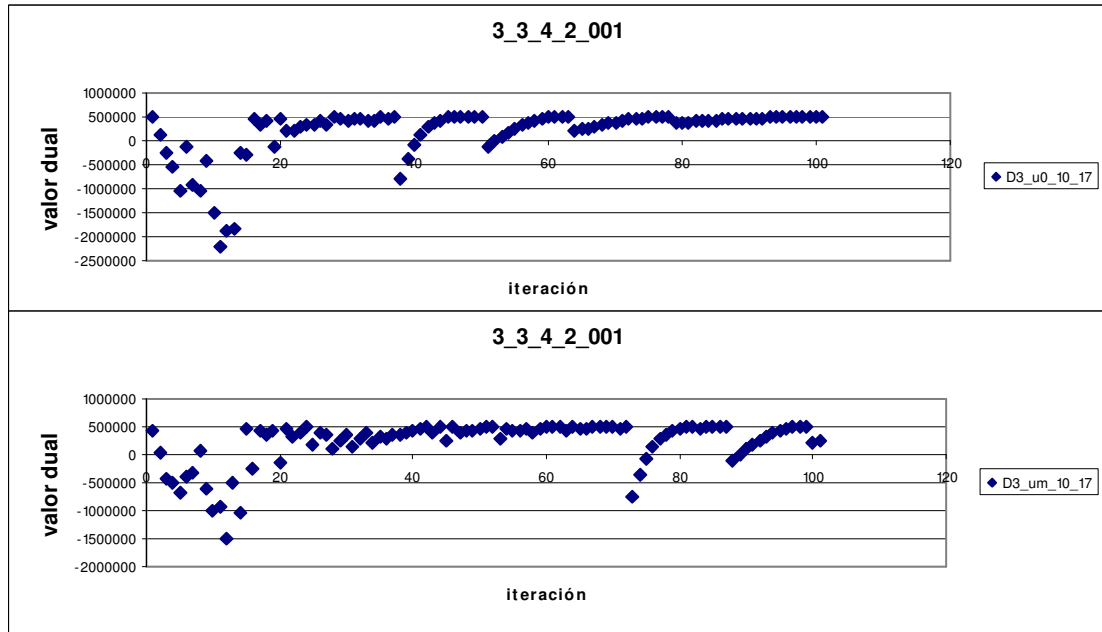


Figura A.18. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 17.

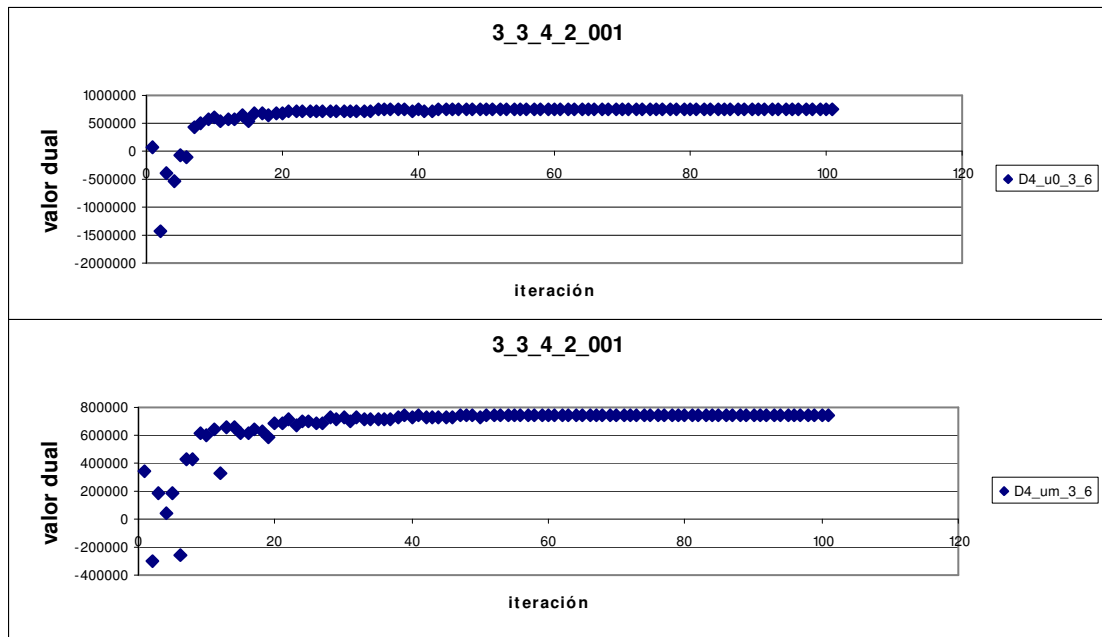


Figura A.19. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 6.

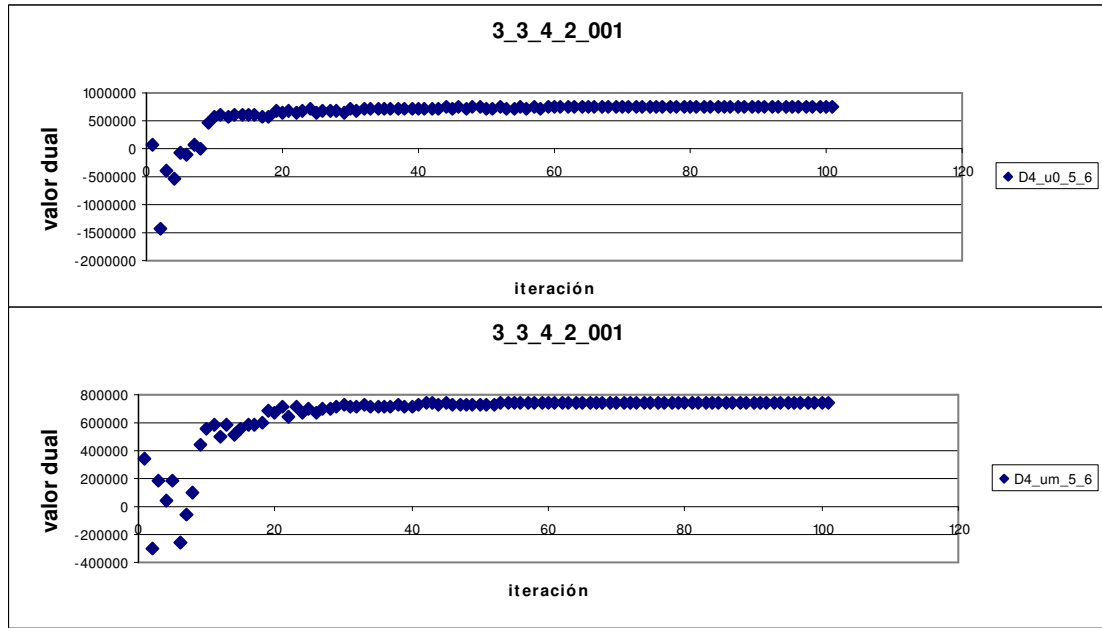


Figura A.20. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 6.

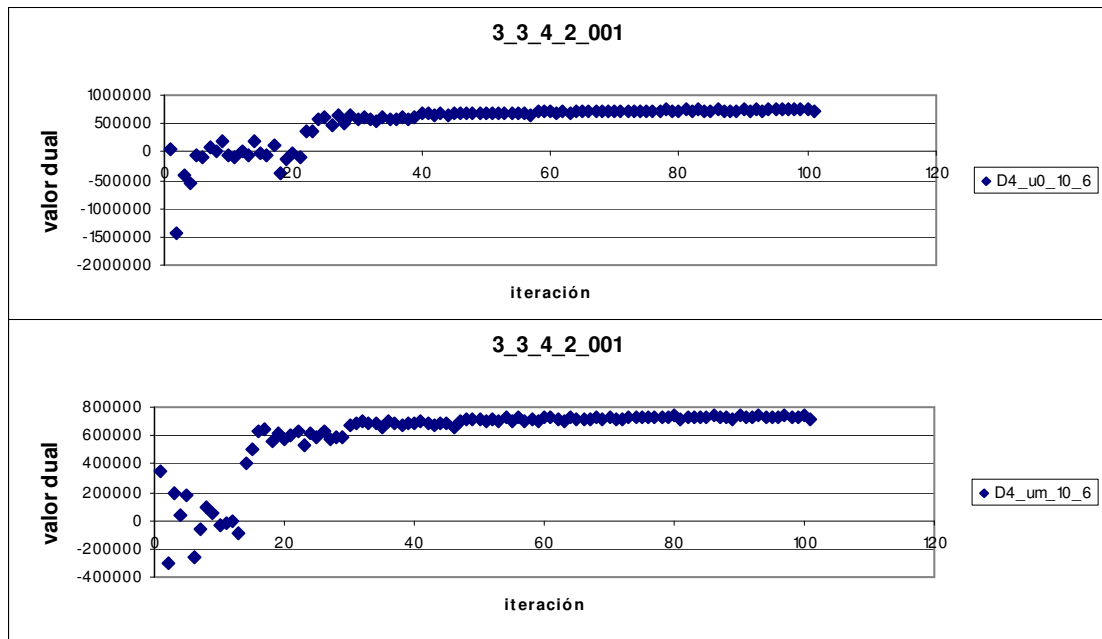


Figura A.21. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 6.

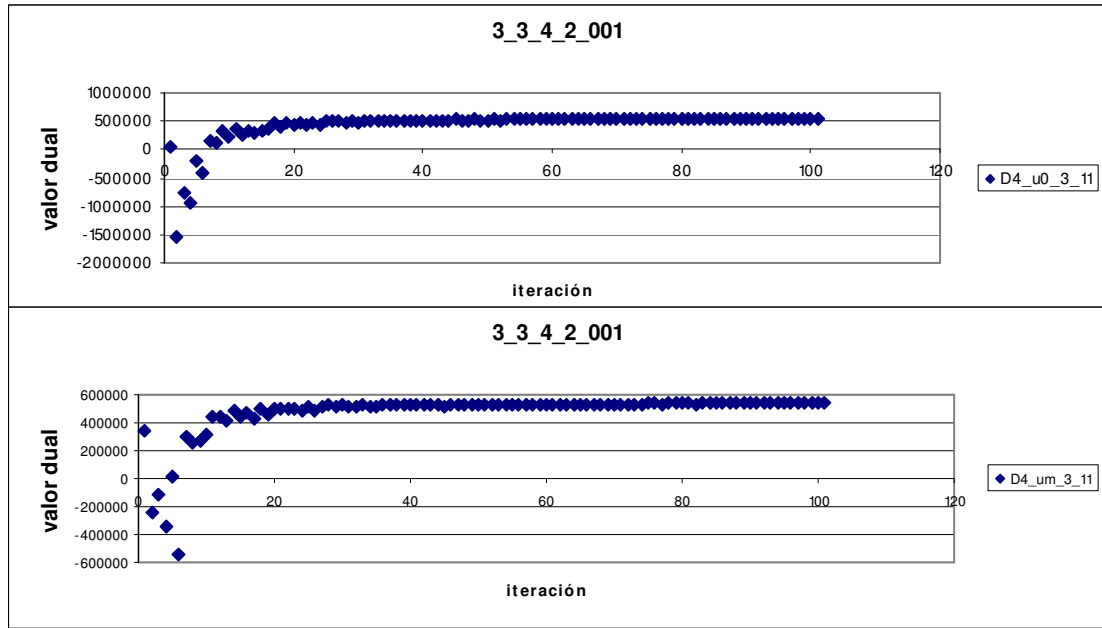


Figura A.22. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 11.

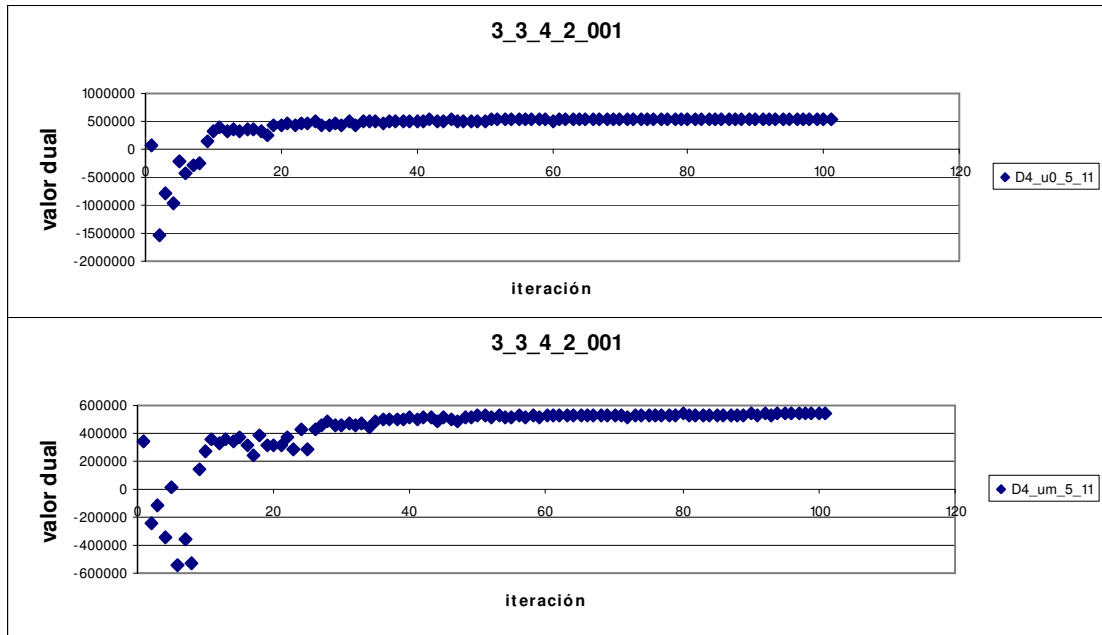


Figura A.23. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 11.

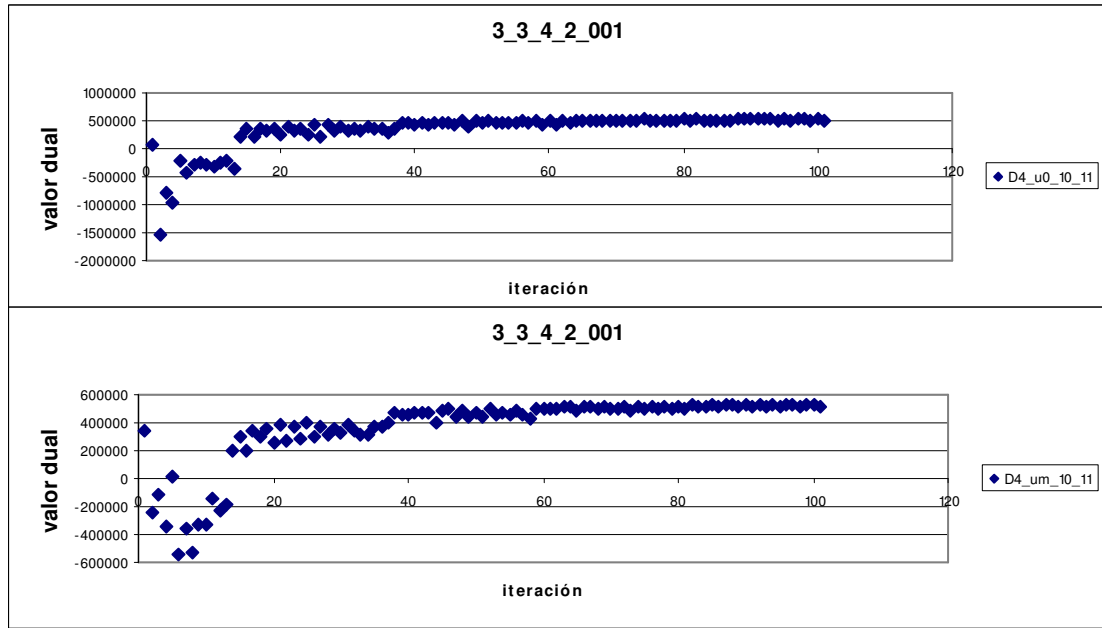


Figura A.24. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 11.

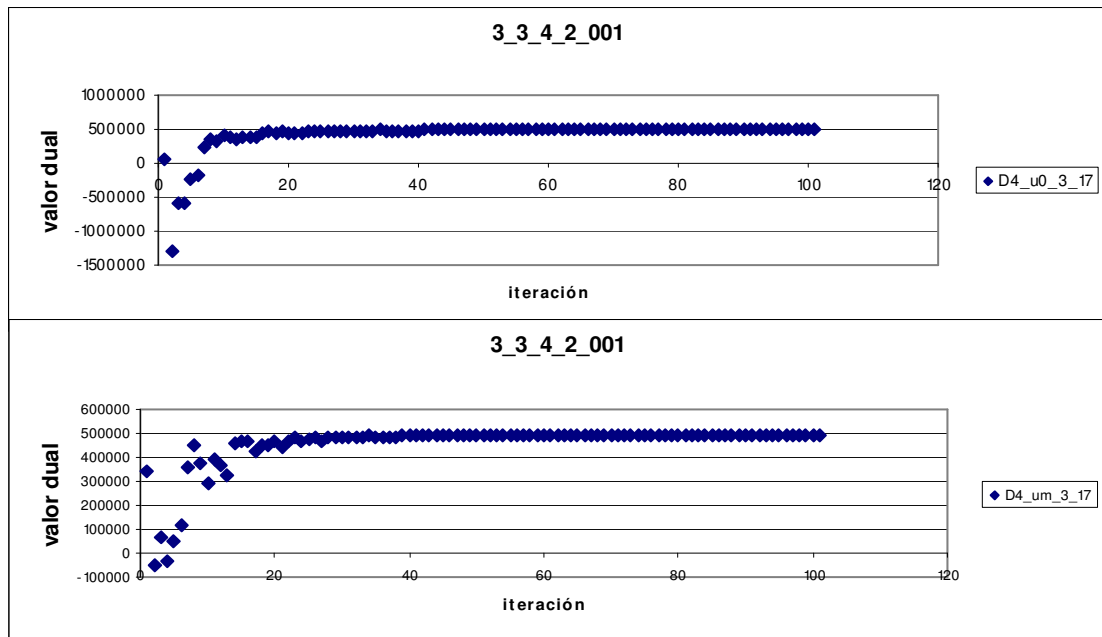


Figura A.25. Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 17.

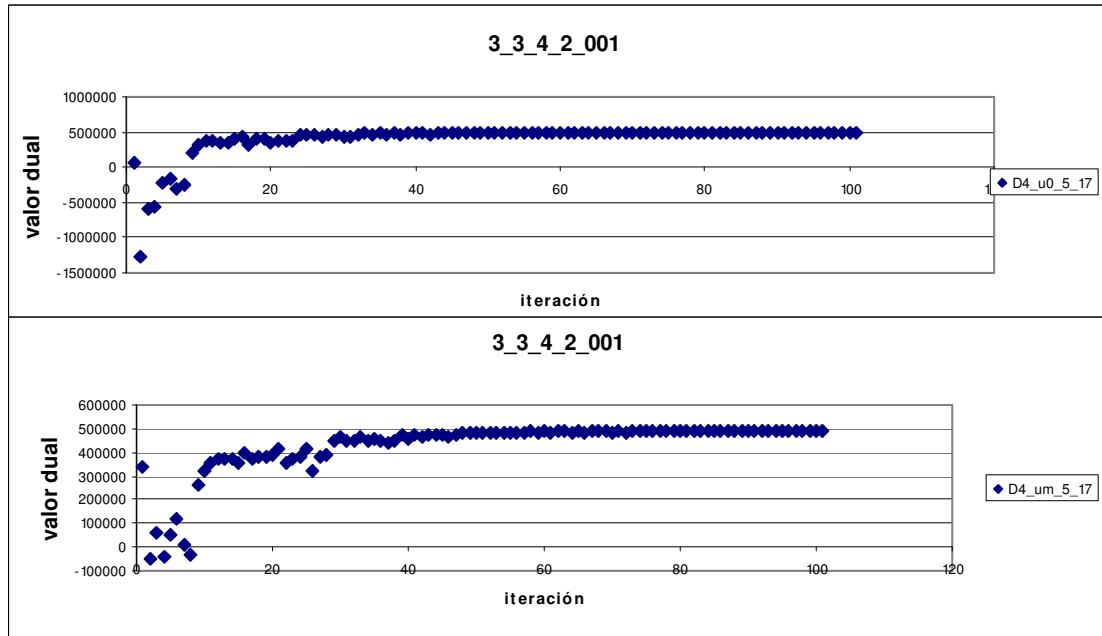


Figura A.26 Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 17.

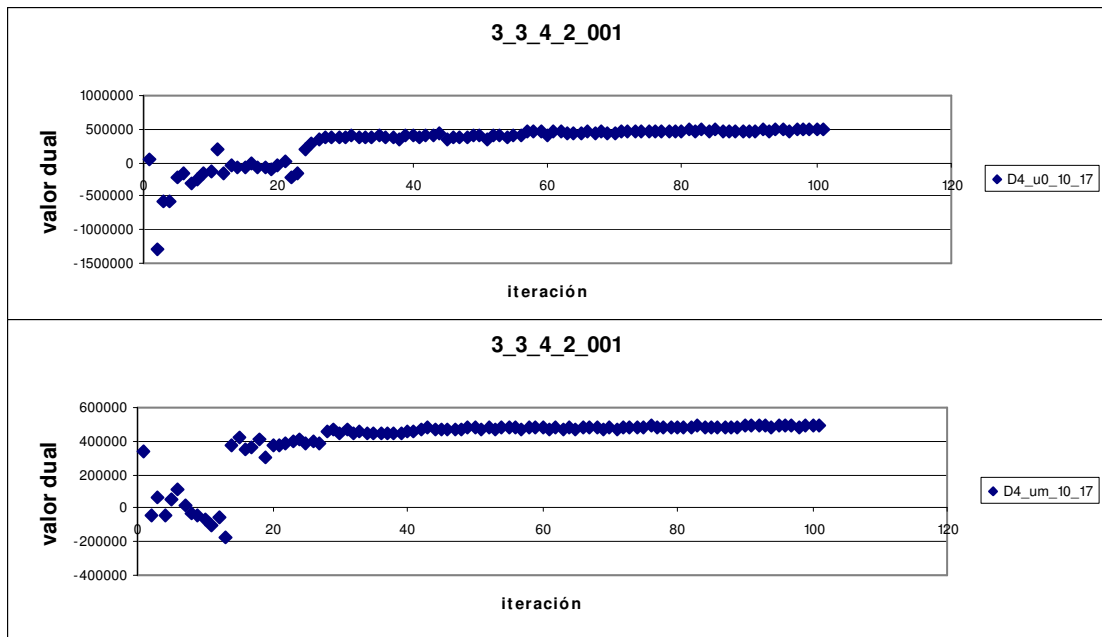


Figura A.27 Convergencia de D4 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 17.

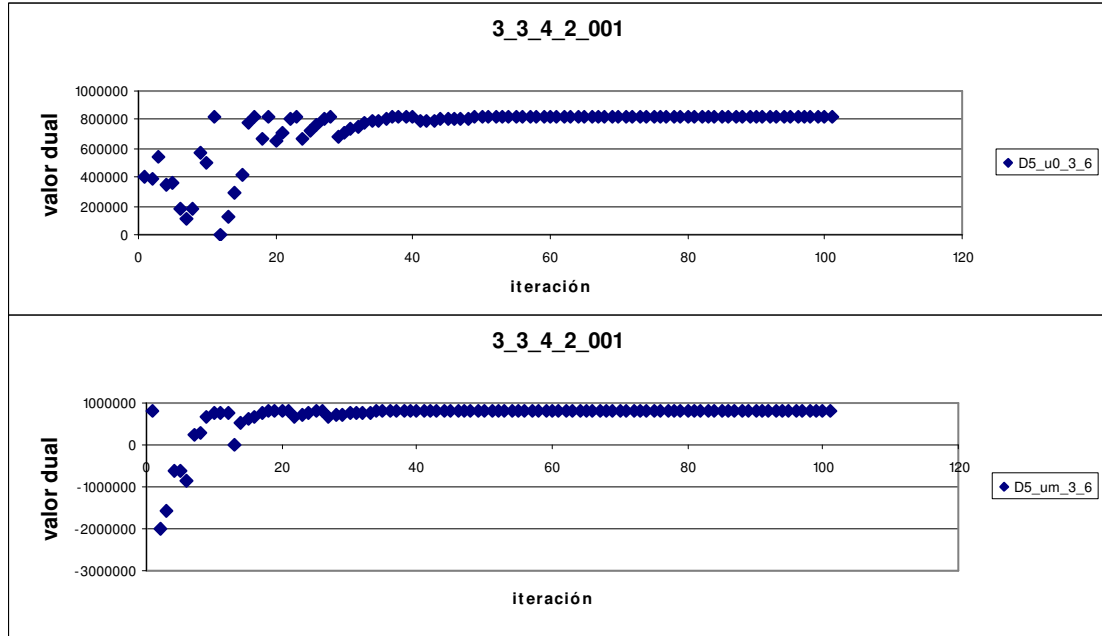


Figura A.28. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 6.

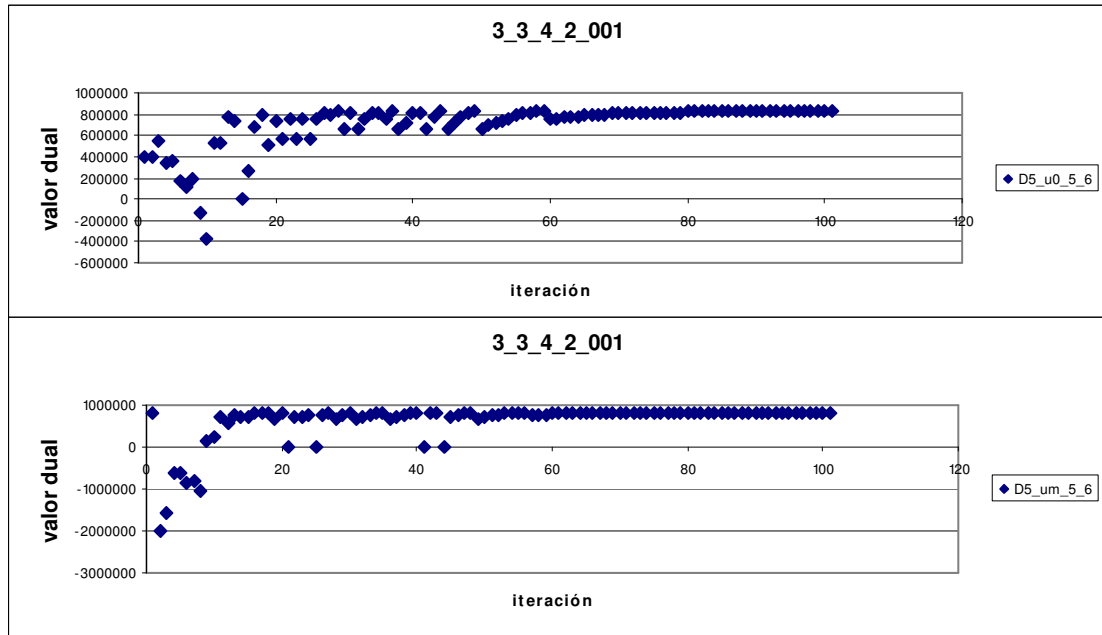


Figura A.29. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 6.

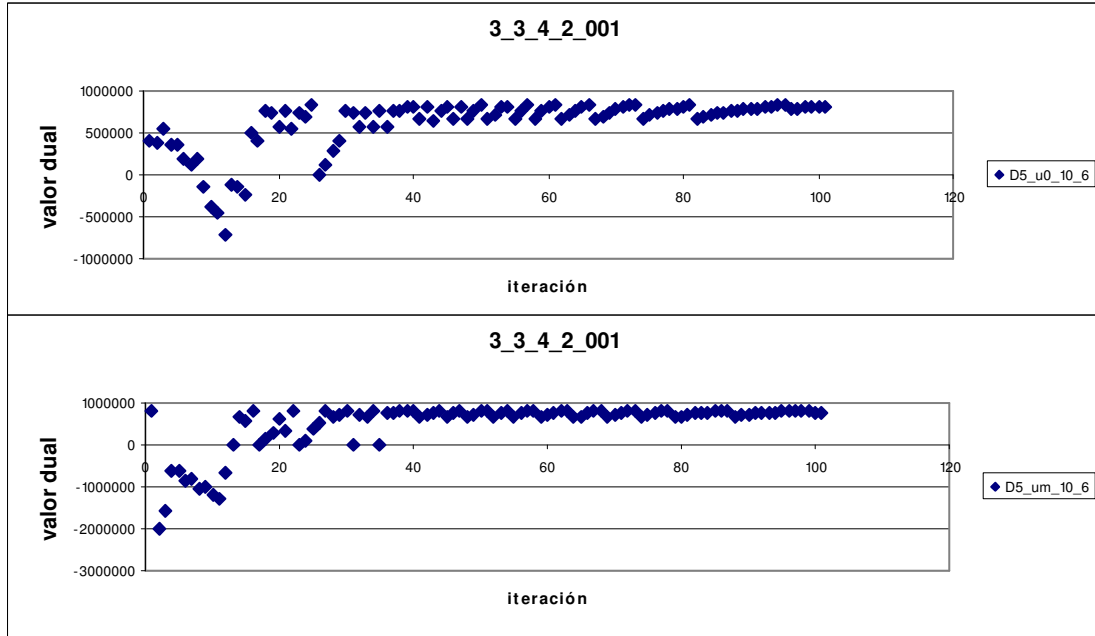


Figura A.30. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 6.

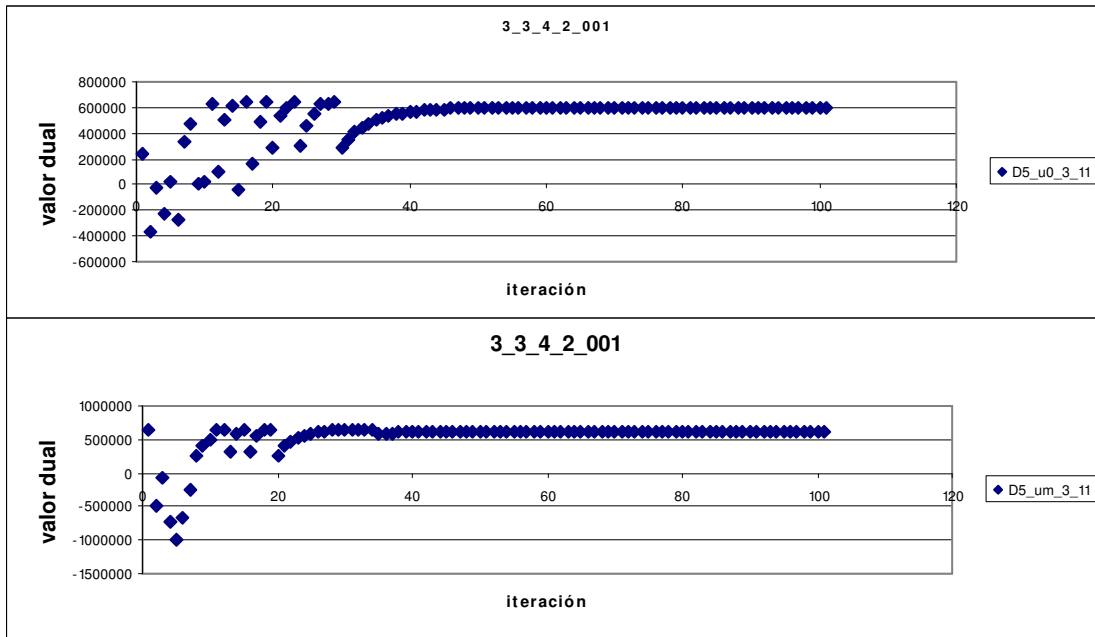


Figura A.31. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 11.

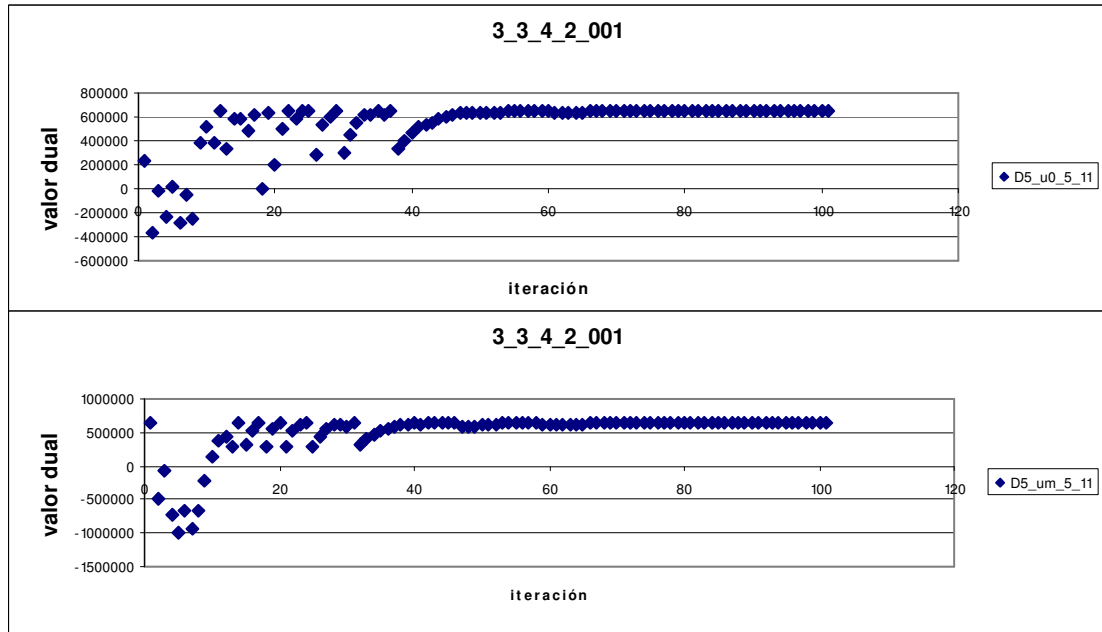


Figura A.32. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 11.

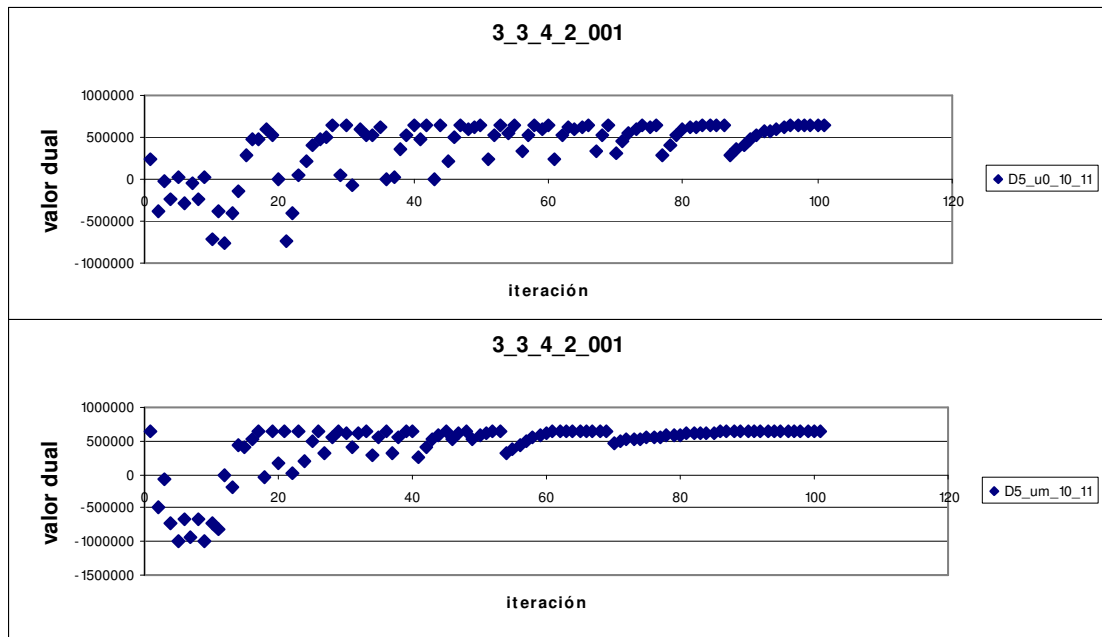


Figura A.33. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 11.

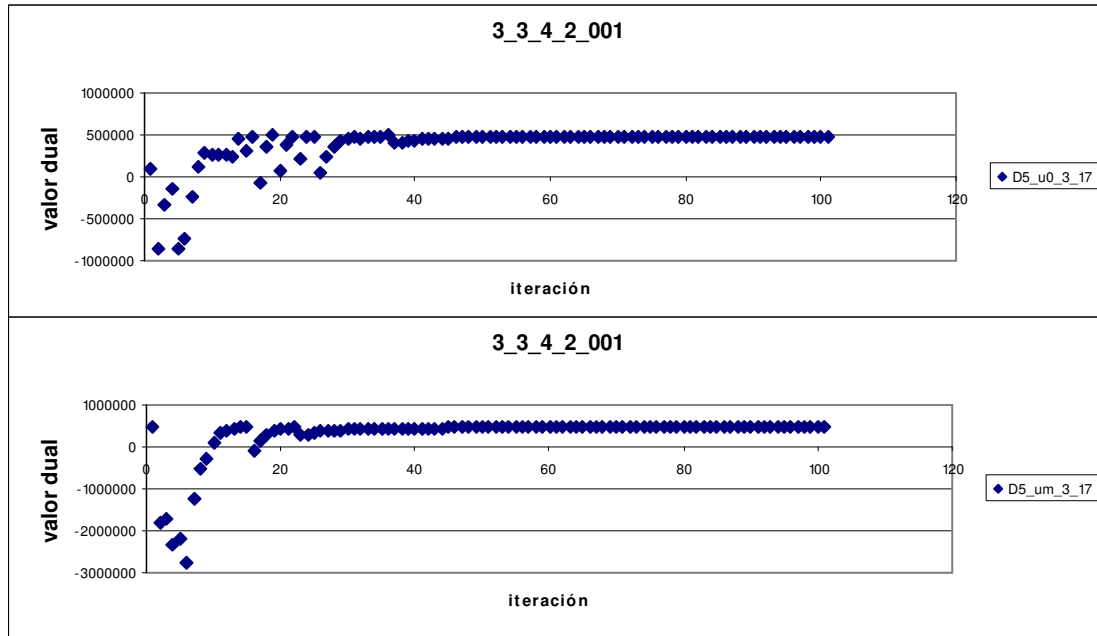


Figura A.34. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 3$ en el punto 17.

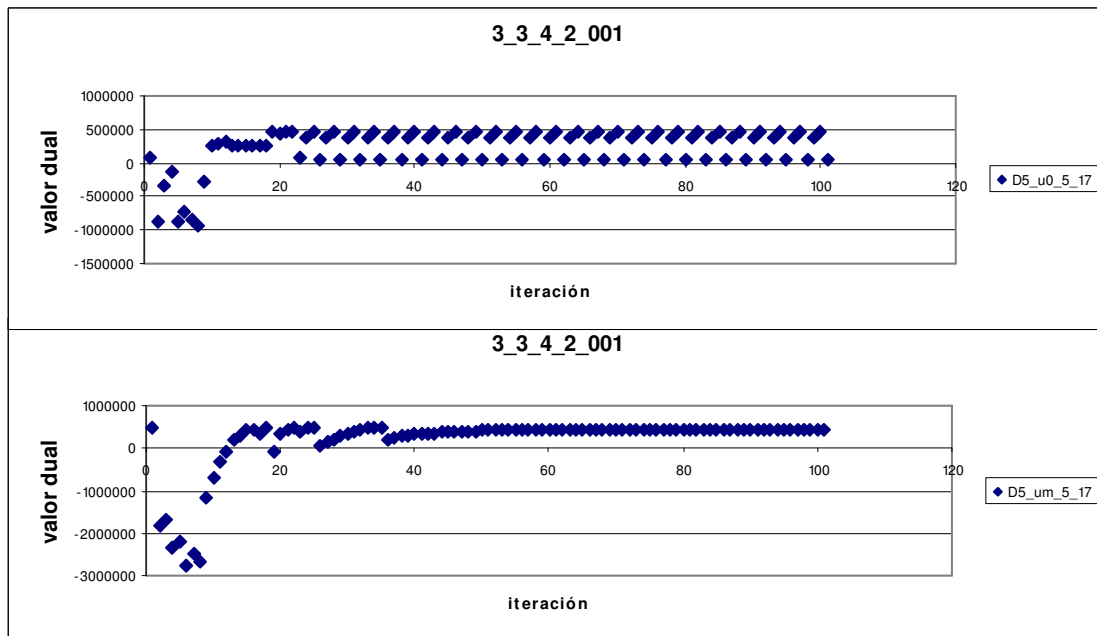


Figura A.35. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 5$ en el punto 17.

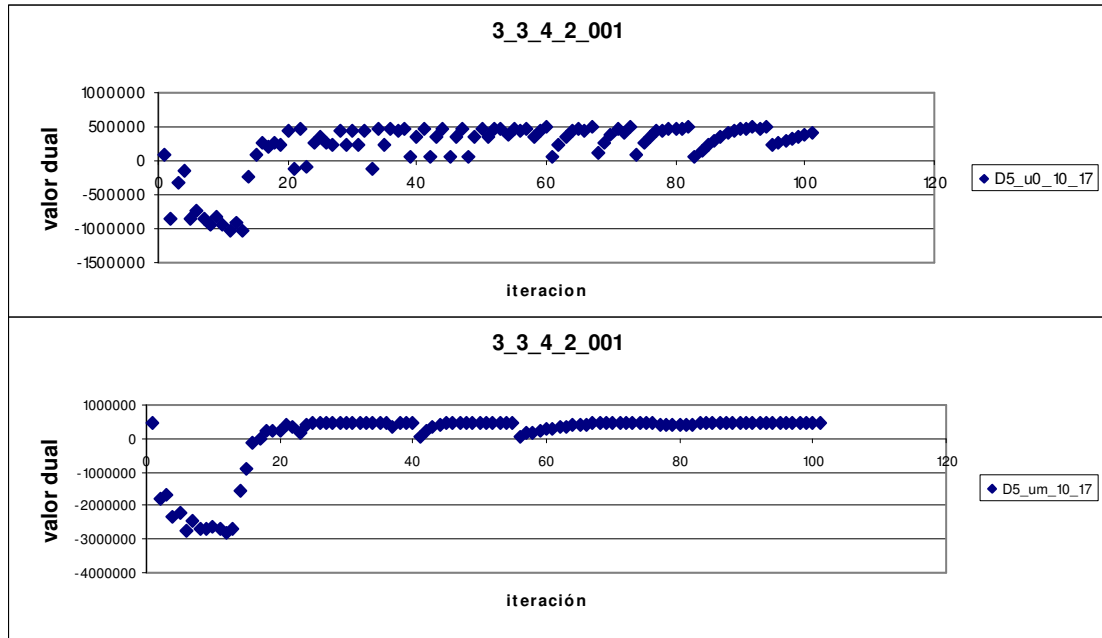


Figura A.36. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 17.

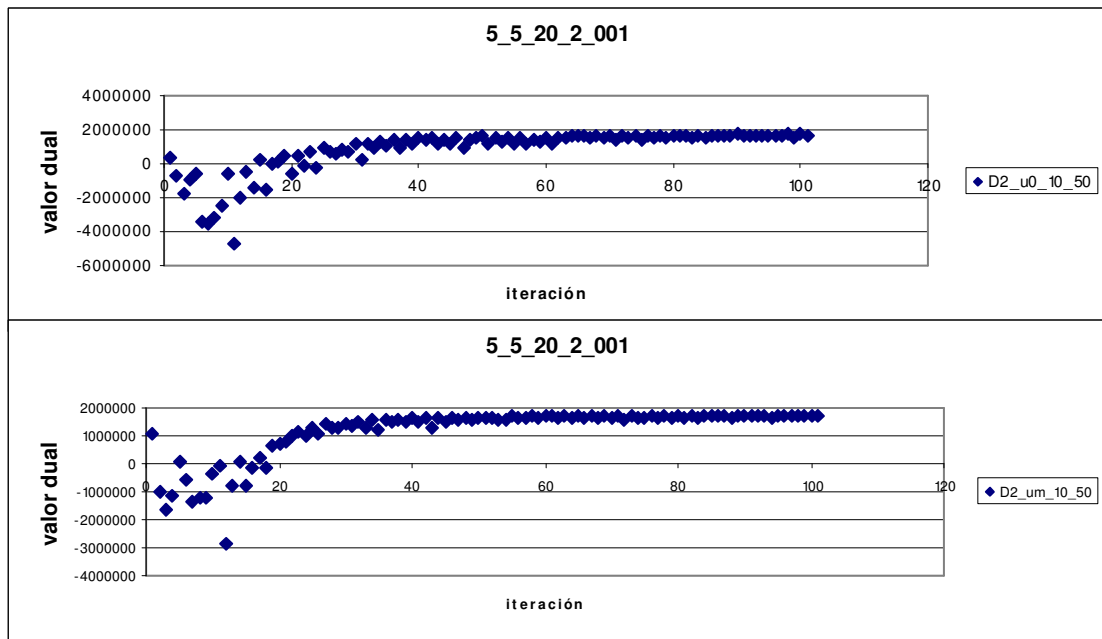


Figura A.37. Convergencia de D2 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 50.

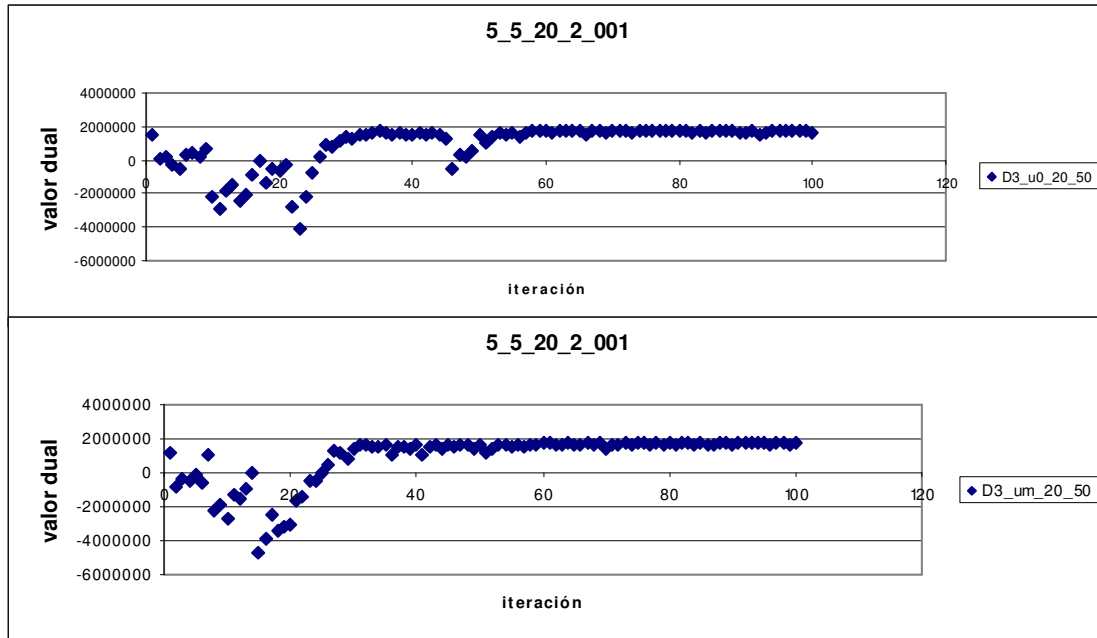


Figura A.38. Convergencia de D3 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 20$ en el punto 50.

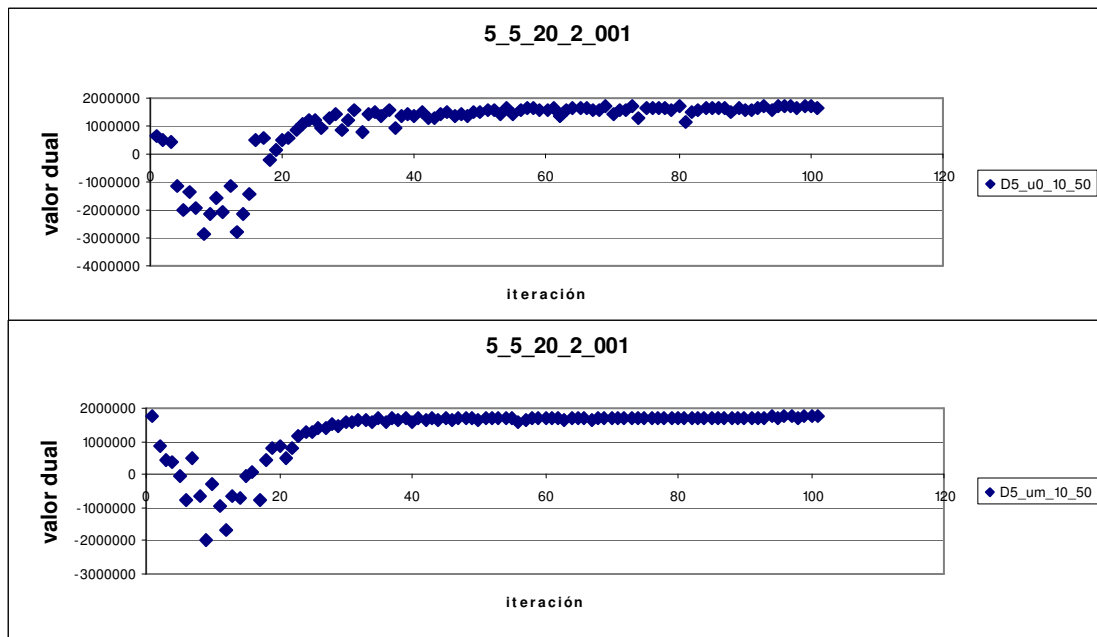


Figura A.39. Convergencia de D5 para $u_0 = 0$ y $u_0 = \text{duales}$ con $p = 10$ en el punto 50.

APÉNDICE B

Las Tablas B.1-B.3 muestran los resultados de la convergencia del método optimización por subgradiente, el cual finaliza en 1200 iteraciones, para tres puntos de ε de la instancia 3_3_4_2_001 agregando las restricciones redundantes a las 5 diferentes dualizaciones.

f_1						
3_3_4_2_RR	D1	D2	D3	D4	D5	$f_2 \leq \varepsilon$
$u_0 = 0$						
$p = 10$	514880.51	514880.81	516706.82	516470.60	516926.00	17
$p = 20$	514331.27	514112.14	516926.00	516926.00	516926.00	17
$p = 25$	515592.54	515522.28	516925.98	516926.00	516926.00	17
$p = 35$			516926.00	516926.00		17
$u_0 = \text{valores duales}$						
$p = 10$	506442.55	506806.26	516925.88	501216.90	516926.00	17
$p = 20$	516926.01	512569.57	516925.99	509817.59	516926.00	17
$p = 25$	516925.94	516925.92	489339.16	513051.46	516926.00	17
$p = 35$			516926.00	516926.00		17

Tabla B.1 Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 17$.

	f_1					
3 3 4 2 RR	D1	D2	D3	D4	D5	$f_2 \leq \varepsilon$
$u_0 = 0$						
$p = 10$	503110.23	503112.71	515561.91	577150.47	674622.00	11
$p = 20$	504004.60	505180.57	516938.78	577184.58	674622.00	11
$p = 25$	516926.76	516926.98	516943.04	577205.27	674622.00	11
$p = 35$			515736.37	577192.06		11
$u_0 = \text{valores duales}$						
$p = 10$	494899.50	500483.67	516931.09	558096.41	674622.00	11
$p = 20$	516928.01	516926.69	516935.74	565467.16	674622.00	11
$p = 25$	516928.04	516926.94	516943.23	567256.98	674622.00	11
$p = 35$			515726.99	572937.63		11

Tabla B.2 Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 11$.

	f_1					
3 3 4 2 RR	D1	D2	D3	D4	D5	$f_2 \leq \varepsilon$
$u_0 = 0$						
$p = 10$	502687.85	502747.57	488840.88	773345.90	842722.00	6
$p = 20$	516936.45	516931.36	516230.44	773168.33	842722.00	6
$p = 25$	516937.57	516931.71	516996.08	775075.06	842722.00	6
$p = 35$			517012.85	774737.21		6
$u_0 = \text{valores duales}$						
$p = 10$	500817.46	498118.64	488862.09	760044.57	842722.00	6
$p = 20$	516945.13	514397.39	517003.51	766742.67	842722.00	6
$p = 25$	516950.66	516937.59	516985.77	769590.12	842722.00	6
$p = 35$			516991.12	775070.75		6

Tabla B.3 Valores de f_1 para las 5 dualizaciones cuando $\varepsilon = 6$.

APÉNDICE C

Las Tablas C.1-C.3 muestran los conjuntos inferiores de las 5 dualizaciones para las instancias de tamaño 5_5_5_2, las Tablas C.4-C.6 muestran los conjuntos inferiores de 4 dualizaciones para las instancias de tamaño 5_5_5_5, y las Tablas C.7-C.9 muestran los conjuntos inferiores de 3 dualizaciones para las instancias de tamaño 5_5_20_2.

	Instancia 5_5_5_2_001				
	D1	D2	D3	D4	D5
f_2	f_2				
47	241487.679			241487.694	242098.505
46				241516.916	244925.601
45					247232.783
44	241487.701				250713.848
43		241487.665			256209.865
42					257682.995
41	241487.750				261879.699
40					267581.031
39	241487.786	241487.740			277356.341
38					280027.500
37	241487.862				287081.999
36	241487.958		242262.358	241693.038	288801.391
35	241487.963		245982.402	241693.211	291170.339
34	241487.987			241694.256	303939.891
33			245983.117	244687.381	307717.012
32			245984.256		316657.007
31					328108.828
30		241487.747		249792.644	343910.727
29	241487.993	241488.048			356597.377
28	241488.201		245985.553		364970.351
27					373330.154
26					391436.519
25				250415.485	403193.526
24		241488.137			411092.826
23		241488.319		258858.054	426949.147
22		241488.568	245986.713	269740.424	431140.614
21	241489.413	241489.030	245997.710		448931.482
20	241489.913	241489.337		290061.744	467158.519
19	241490.646	241489.475		297151.920	531234.382
18	241491.106	241489.714		349315.357	541484.954
17	241491.611	241489.907	245992.023		572518.138
16	241492.380	241490.464			596481.899
15	241493.158	241491.004	246004.602	371143.508	627600.615
14	241494.401	241491.626	246006.832		640195.291
13	241495.750	241492.440		413638.087	736033.945
12	241497.184	241493.393	246005.875	472122.748	759751.511
$ S_i $	20	17	11	16	34

Tabla C.1. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_2_001.

Instancia 5_5_5_2_002					
	D1	D2	D3	D4	D5
f_2	f_1				
49					
48					
47				318033.898	
46					
45				318034.169	
44			325863.987		
43					
42				318608.256	
41			325864.086		
40					
39					
38					
37			325864.134		
36				318824.338	
35				318824.708	
34					
33					
32				318824.807	
31			325864.170	318825.289	
30				318825.375	
29	318032.955		325864.472	318825.497	
28			325864.539		
27				319156.964	
26			325864.544	319157.187	
25	318035.627			319437.701	
24	318037.199	318033.096		322880.130	
23	318039.894	318035.873	325864.811	335896.206	
22		318035.908	325865.133	347793.630	
21		318036.288	325865.848	353457.307	
20	318040.056	318036.331	325865.880	383006.140	
19	318041.543	318036.721	325868.421	392972.725	
18	318042.367	318037.011	325870.675	409467.916	
17	318043.654	318037.601	325873.064	411130.217	
$ S_i $	8	8	14	20	0

Tabla C.2. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_2_002.

	Instancia 5_5_5_2_003				
	D1	D2	D3	D4	D5
f_2	f_1				
49					
48					
47			297240.599		
46			297254.567		
45					
44					
43	291330.358		297254.568		
42	291330.360		297254.570		
41			297254.725		
40				291488.373	
39					
38			297254.727	291484.927	
37		291330.668	297254.757		
36			297254.812		
35					
34	291330.537		297254.817		
33		291330.834	297254.879		
32	291330.821		297254.910		
31	291330.906				
30			297254.917		
29		291330.766			
28	291330.985				
27	291331.483	291331.038	297255.024		
26	291331.509		297255.120	291486.189	
25	291331.780		297255.296	291504.005	
24			297255.457	306140.895	
23	291332.939	291331.104	297255.748	316735.857	
22	291333.264		297255.890	323566.226	
21	291334.890	291331.337		332088.451	
20	291337.683			340592.761	
19	291337.800	291331.591		344822.168	
18		291331.947		350847.764	
17		291332.468		379189.715	
16	291338.095	291332.986	297256.255	398295.784	
15	291340.516	291333.894	297260.330	408800.158	
$ S_i $	16	11	20	14	

Tabla C.3. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_2_003.

	Instancia 5_5_5_5_001				
	D1	D2	D3	D4	D5
f_2	f_1				
48			235410.379	232587.368	
47				233168.154	
46					
45					
44					
43					
42					
41					
40					
39				233451.511	
38			235418.486		
37					
36					
35					
34					
33					
32					
31			235433.557		
30			235450.853		
29					
28					
27			235450.306		
26			235450.323		
25			235451.777	233456.559	
24			235451.875	238339.087	
23		232408.299		247401.135	
22		232418.154	235452.229	255619.850	
21				266128.720	
20			235453.276	273420.151	
19	232458.274	232459.067		282792.829	
18				297066.054	
17				303641.862	
16				314329.597	
15				331769.523	
14			235457.948	346945.666	
13		232497.575	235467.190	368759.064	
12		232549.884	235474.807	388458.632	
11	232520.364		235488.834	425561.187	
10	232521.351	232548.890	235506.698	465939.032	
$ S_i $	3	6	15	19	

Tabla C.4. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_5_001.

	Instancia 5_5_5_5_002				
	D1	D2	D3	D4	D5
f_2	f_1				
50					
49			303140.109	302047.641	
48			303140.131	302261.496	
47				302623.039	
46				302635.227	
45			303140.137		
44					
43				302629.189	
42					
41	302047.817			302629.573	
40			303140.158	302637.159	
39			303140.265		
38	302048.435				
37	302048.598		303140.386	302565.981	
36	302048.614	301775.189	303140.408		
35					
34		301982.514	303140.488		
33					
32	302048.719		303140.757	302620.993	
31	302049.208	302048.527	303141.049	302637.610	
30	302049.541	302048.527	303141.221	302833.893	
29	302049.769		303141.384	302887.744	
28	302050.227	302048.772	303141.669	303518.120	
27	302050.648	302048.931	303141.895	306034.926	
26		302048.962	303142.364	306130.687	
25		302049.605		306152.974	
24	302050.617	302049.636	303143.004	317853.074	
23	302052.668		303143.416	320652.295	
22	302053.264	302049.677	303143.590	331161.074	
21	302057.678	302049.845	303143.725	341920.095	
20	302057.772	302050.377	303144.147	350858.659	
19		302050.393		367821.076	
18			303144.643	379390.089	
17				385069.113	
16		302050.678	303147.814	400377.257	
15		302051.128	303151.910	417843.449	
14	302057.903		303156.342	440853.190	
13	302062.912		303159.131	465759.277	
12	302067.243	302051.199	303166.626	482308.002	
11	302068.307	302052.544	303232.848	523551.792	
$ S_i $	19	17	27	30	

Tabla C.5. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_5_002.

	Instancia 5_5_5_5_003				
	D1	D2	D3	D4	D5
f_2	f_1				
50			277914.546		
49	278735.622		277914.549		
48					
47			278500.648		
46					
45					
44					
43	278735.661				
42	278735.707				
41	278735.800				
40	278735.810				
39	278735.871				
38					
37			278619.260		
36	278735.947				
35				278714.629	
34					
33	278735.961			278721.155	
32	278736.534				
31	278737.102			278724.450	
30				278726.875	
29	278737.257			279929.195	
28				280545.758	
27					
26				281284.458	
25				281290.292	
24				290940.04	
23				295180.643	
22				307406.305	
21				312229.306	
20				322315.685	
19				331337.868	
18				342783.148	
17				354800.095	
16				377331.670	
15				393251.483	
14			280578.152	404151.989	
13			280587.240	428967.958	
12	278737.361	278735.011	280637.152	461812.129	
$ S_i $	12	1	7	21	

Tabla C.6. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_5_5_003.

	Instancia 5_5_20_2_001				
	D1	D2	D3	D4	D5
f_2	f_1				
50					
49					
48					
47					
46					
45					
44					
43					
42					
41					
40					
39					
38					
37			1800571.93		
36			1809010.32		
35			1818027.73		
34			1822966.76		
33			1828309.35		
32			1834373.16		
31			1857210.63		
30		1789558.46	1871125.37		
29			1928382.89		
28			1941786.37		
27			1958863.09		
26	1786805.04		1959665.52		
25			1976091.72		
24			2018347.23		
23			2064114.41		
22			2117375.79		
21	1793196.46	1791173.23	2212987.82		
20	1800722.20	1800706.94	2285532.57		
$ S_i $	3	3	18		

Tabla C.7. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_20_2_001.

	Instancia 5_5_20_2_002				
	D1	D2	D3	D4	D5
f_2	f_1				
50			1710546.87		
49					
48					
47					
46					
45					
44					
43					
42					
41					
40					
39					
38					
37					
36					
35					
34			1712128.47		
33					
32			1712133.16		
31			1725810.81		
30			1734632.55		
29			1737896.24		
28			1744170.09		
27			1754183.53		
26					
25			1757182.70		
24	1708001.98	1708302.56	1785212.75		
23			1795794.93		
22	1709393.52	1709351.53	1858265.24		
21	1710923.18		1910014.86		
20	1710935.33	1710921.95	1991984.97		
19			2023287.10		
18	1710944.00	1710933.01	2062146.00		
$ S_i $	5	4	16		

Tabla C.8. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_20_2_002.

	Instancia 5_5_20_2_003				
	D1	D2	D3	D4	D5
f_2	f_1				
50			1653962.09		
49					
48					
47					
46					
45					
44					
43			1654423.03		
42					
41					
40					
39			1654450.49		
38					
37					
36			1654458.32		
35			1654459.39		
34			1654493.96		
33			1660843.27		
32			1666239.19		
31			1680831.13		
30			1684489.71		
29			1685657.20		
28	1640406.83	1640776.98			
27			1685900.68		
26		1643963.72	1686023.24		
25			1686048.76		
24			1711563.09		
23	1643096.10	1644327.83	1753443.79		
22			1814270.99		
21		1647972.81	1860592.96		
20			1910484.14		
19	1649721.96	1648675.13	1950869.52		
18	1653330.22	1650785.45	1991999.57		
$ S_i $	4	6	21		

Tabla C.9. Conjuntos acotadores inferiores de la instancia 5_5_20_2_003.

APÉNDICE D

En las Tablas D.1 y D.2 aparecen los resultados del tiempo de ejecución, el valor de $\bar{D}(\text{ConjR}, \text{ConjMIP})$, $D_{\min}(\text{ConjR}, \text{ConjMIP})$, $D_{\max}(\text{ConjR}, \text{ConjMIP})$ de las relajaciones propuestas en el trabajo de Olivares-Benítez (2007). En las Tablas D.3-D.5 muestran el intervalo de optimalidad de la diferencia promedio de las Relajaciones propuestas por Olivares-Benítez (2007) contra las 5 dualizaciones propuestas en estas tesis (considerando solo las instancias donde se obtiene todo el conjunto acotador inferior).

Tamaño	Instancia	Tiempo de ejecución (seg)				$\bar{D}(\text{ConjR}, \text{ConjMIP})$			
		MIP	LP	ABr	Zr	LP	Node 0	ABr	Zr
5_5_5_2	1	6.3	0.06	3.0	61.8	0.598	0.867	0.649	0.913
	2	11.3	0.05	2.6	53.4	0.684	0.841	0.761	0.916
	3	10.4	0.05	3.3	44.9	0.606	0.832	0.726	0.891
5_5_5_5	1	141.3	0.09	7.1	141841	0.622	0.802	0.656	0.941
	2	334.8	0.09	6.3	98280	0.679	0.825	0.719	0.95
	3	346.5	0.08	10.4	140449	0.641	0.789	0.728	0.903
5_5_20_2	1	1981.9	0.16	8.8	2711.3	0.819	0.892	0.853	0.958
	2	1658.1	0.14	11.7	7957	0.801	0.880	0.828	0.595
	3	12710	0.16	9.5	253042	0.738	0.870	0.88	0.952

Tabla D.1. Tiempo de ejecución y valor $\bar{D}(\text{ConjR}, \text{ConjMIP})$ para las instancias pequeñas.

Tamaño	Instancia	$D_{\min}(\text{ConjR}, \text{ConjMIP})$				$D_{\max}(\text{ConjR}, \text{ConjMIP})$			
		LP	Node 0	ABr	Zr	LP	Node 0	ABr	Zr
5_5_5_2	1	0.304	0.643	0.350	0.841	0.933	1.000	1.000	0.956
	2	0.375	0.739	0.418	0.871	0.897	0.970	0.998	0.963
	3	0.327	0.767	0.403	0.836	0.835	0.963	0.994	0.944
5_5_5_5	1	0.207	0.538	0.228	0.905	0.953	1.000	1.000	0.977
	2	0.324	0.713	0.347	0.911	0.946	1.000	1.000	0.971
	3	0.278	0.654	0.318	0.850	0.882	0.964	1.000	0.937
5_5_20_2	1	0.535	0.835	0.557	0.882	0.959	0.964	0.998	0.970
	2	0.533	0.811	0.552	0.923	0.965	0.971	0.999	0.976
	3	0.516	0.783	0.528	0.905	0.977	0.980	0.998	0.979

Tabla D.2. Valores de $D_{\min}(\text{ConjR}, \text{ConjMIP})$ y $D_{\max}(\text{ConjR}, \text{ConjMIP})$ de las instancias pequeñas.

Tamaño	Instancia	IO (%) de LR vs. Dualizaciones				
		IO-D1	IO-D2	IO-D3	IO-D4	IO-D5
5_5_5_2	001	4.830	4.829	6.529	16.250	36.764
	002	8.038	8.037	10.247	10.466	30.549
	003	14.639	14.639	16.340	18.679	
5_5_5_5	001	3.472	3.470	4.664	11.075	
	002	5.051	5.049	5.393	10.900	
	003	11.310	11.309	11.785	15.965	
5_2_20_2	001	3.896	3.899		7.557	
	002	3.257	3.298		5.415	
	003	7.580	7.568		9.775	
Promedio		6.897	6.900	9.160	11.787	33.656

Tabla D.3. Intervalo de optimalidad de RL entre las dualizaciones.

Tamaño	Instancia	IO (%) de LPc vs. Dualizaciones				
		IO-D1	IO-D2	IO-D3	IO-D4	IO-D5
5_5_5_2	001	-27.526	-27.526	-26.208	-17.644	8.318
	002	-11.560	-11.560	-9.383	-9.161	14.607
	003	-14.672	-14.672	-12.937	-10.433	
5_5_5_5	001	-19.654	-19.656	-18.650	-12.785	
	002	-13.319	-13.320	-13.005	-7.628	
	003	-8.398	-8.399	-7.905	-3.323	
5_2_20_2	001	-4.461	-4.458		-0.678	
	002	-5.913	-5.873		-3.766	
	003	-8.216	-8.227		-5.982	
Promedio		-12.635	-12.632	-14.681	-7.933	11.462

Tabla D.4. Intervalo de optimalidad de LPc entre las dualizaciones.

		IO (%) de ABr vs. Dualizaciones				
Tamaño	Instancia	IO-D1	IO-D2	IO-D3	IO-D4	IO-D5
5_5_5_2	001	-3.182	-3.182	-1.422	9.107	31.370
	002	-2.263	-2.263	0.143	0.386	22.730
	003	-2.214	-2.214	-0.226	2.576	
5_5_5_5	001	-1.772	-1.775	-0.544	6.214	
	002	-0.540	-0.541	-0.180	5.652	
	003	-0.723	-0.723	-0.188	4.559	
5_2_20_2	001	-0.093	-0.090		3.720	
	002	-0.004	0.039		2.227	
	003	-9.259	-9.270		-7.050	
Promedio		-2.228	-2.224	-0.403	3.043	27.050

Tabla D.5. Intervalo de optimalidad de ABr entre las dualizaciones.

		IO (%) de Zr vs. Dualizaciones				
Tamaño	Instancia	IO-D1	IO-D2	IO-D3	IO-D4	IO-D5
5_5_5_2	001	-31.178	-31.178	-29.926	-21.793	3.453
	002	-18.801	-18.801	-16.802	-16.599	6.992
	003	-20.322	-20.323	-18.703	-16.364	
5_5_5_5	001	-31.523	-31.524	-30.666	-25.668	
	002	-24.724	-24.725	-24.452	-19.782	
	003	-19.962	-19.963	-19.532	-15.528	
5_2_20_2	001	-11.043	-11.040		-7.520	
	002	28.137	28.168		29.740	
	003	-16.121	-16.132		-14.080	
Promedio		-16.171	-16.169	-23.347	-11.955	5.223

Tabla D.6. Intervalo de optimalidad de Zr entre las dualizaciones.

BIBLIOGRAFÍA

F. Altıparmak, M. Gen, L. Lin y T. Paksoy (2006). A genetic Algorithm approach for multi-objective optimization of supply chain networks. *Computers & Industrial Engineering*. 51(1):197-216.

C. A. Coello, D. A. Van y G. B. Lamont (2002). *Evolutionary Algorithms for Solving Multi-Objective Problems*. Kluwer, New York, EUA.

Y. Collet y P. Siarry (2003). *Multiobjective Optimization Principles and Case Studies*. Springer-Verlag, Berlín, Alemania.

R. Diéguez (1993). The use of Lagrangean Relaxation in the solution of uncapacitated facility location problems. *Location Science*, 1(1):57-79.

S. Duni, B. Eksioğlu y H. Edwin (2007). A Lagrangean heuristic for integrated production and transportation planning problems in a dynamic, multi-item, two-layer supply chain. *IIE Transactions*, 39(2):191-201.

M. Ehrgott (2005). *Multicriteria Optimization*. Springer, Berlín, Alemania.

M. Ehrgott y X. Gandibleux (2007). Bounds sets for biobjective combinatorial optimization problems. *Computers and Operations Research*, 34(9):2674-2694.

S. Elhedhli y F. Gzara (2008). Integrated design of supply chain networks with three echelons, multiple commodities and technology selection. *IIE Transactions*, 40(1):31-44.

G. D. Eppen y F. J. Gould (1987). *Investigación de operaciones en la ciencia administrativa*. Prentice-Hall Hispanoamericana, Naucalpan de Juárez, México.

E. Eskigun, R. Uzsoy, P. Preckel, G. Beaujon, S. Krishnan y J. Tew (2005). Outbound supply chain network design with mode selection, lead times and capacitated vehicle distribution centers. *European Journal of Operational Research*, 165(1):182-206.

M. R. Garey y D. S. Johnson (1979). *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. W.H Freeman and Company, New York, EUA.

M. Guignard (2003). Lagrangean relaxation. *Top*, 11(2):151-228.

M. Guignard y M. B. Rosenwein (1989). An improved based algorithm for the generalized assignment problem. *Operations Research*, 37(4):658-663.

K. Holmberg y D. Yuan (2000). A Lagrangian heuristics based branch-and-bound approach for the capacitated network design problem. *Operations Research*, 48(3):461-481.

R. K. Martin (1999). *Large Scale Linear and Integer Optimization*. Kluwer, Norwell, EUA.

B. A. McCarl (2006). *GAMS user guide: version 22.2*, developed in cooperation with GAMS Development Corporation, Marzo.

- S. Melkote y M. S. Daskin (2001). Capacitated facility location/network design problems. *European Journal of Operational Research*, 129(3):481-495.
- P. B. Mirchandani y R. L. Francis, editores (1990). *Discrete Location Theory*. Wiley, New York, EUA.
- E. Olivares-Benítez (2007). *Capacitated Fixed Cost Facility Location Problem with Transportation Choices*. Disertación doctoral, ITESM, Monterrey, México, Mayo.
- E. Olivares-Benítez, J. L. González-Velarde y R. Z. Ríos-Mercado (2007). A metaheuristic algorithm for a bi-objective supply chain design problem. En J. C. Leyva López (editor), *Proceedings of the 3rd meeting of the Ibero-american network on multicriteria decision and evaluation*, pp. 1-7, Culiacan, México, Noviembre.
- E. Olivares-Benítez, J. L. González-Velarde y R. Z. Ríos-Mercado (2008). A supply chain problem with facility location and bi-objective transportation choices. Manuscrito no publicado. ITESM, Aguascalientes, México, Junio.
- D. Simchi-Levi, P. Kaminski y E. Simchi-Levi (2000). *Designing and Managing the Supply Chain: Concepts, Strategies and Case Studies*. McGraw-Hill, Boston, EUA.
- S. Tragantalerngsak, J. Holt y M. Rönnqvist (1997). Lagrangian heuristics for the two-echelon, single-source, capacitated facility location problem. *European Journal of Operational Research*, 102(3):611-625.
- S. Tragantalerngsak, J. Holt y M. Rönnqvist (2000). An exact method for the two-echelon, single-source, capacitated facility location problem. *European Journal of Operational Research*, 123(3):473-489.
- L. A. Wolsey (1998). *Integer Programming*. Wiley, New York, EUA.

E. Zitzler, L. Thiele, M. Laumanns, C. M. Fonseca y V. Grunert (2003). Performance assessment of multiobjective optimizers: An analysis and review. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*, 7(2):117-132.

AUTOBIOGRAFÍA

ANEL BERENICE REYES RAMÍREZ

**CANDIDATA PARA EL GRADO DE MAESTRO EN CIENCIAS EN
INGENIERÍA DE SISTEMAS**

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA**

TESIS:

**“DETERMINACIÓN DE COTAS INFERIORES BASADAS EN RELAJACIÓN
LAGRANGIANA PARA UN PROBLEMA BI-OBJETIVO DE DISEÑO DE
CADENA DE SUMINISTRO”**

Nacida en la ciudad de Monterrey, Nuevo León, el 28 de julio de 1983. Hija del Sr. Sergio Reyes Hernández y la Sra. Floriberta Ramírez Quintas. Cursó la licenciatura durante el periodo 2000-2005 en la Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas de la Universidad Autónoma de Nuevo León obteniendo el grado de Licenciado en Matemáticas. En enero de 2006 inició los estudios de Maestría en Ciencias en Ingeniería de Sistemas en la Universidad Autónoma de Nuevo León obteniendo una beca completa de manutención por parte del CONACYT.